

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 05 月 19 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540009

研究課題名（和文） 概均質ベクトル空間の分類理論の研究

研究課題名（英文） Research on a classification theory of prehomogeneous vector spaces

研究代表者

木村 達雄（KIMURA TATSUO）

筑波大学 名誉教授

研究者番号：30022726

研究成果の概要（和文）：概均質ベクトル空間の基本的な理論は佐藤幹夫により得られて、その後多くの数学者により発展してきた。その研究には数論的手法や代数解析的手法、表現論的手法などが用いられゼータ関数などへの応用も色々あるので、どのような例があるかを知るためにも分類問題は重要である。既約概均質ベクトル空間の分類は、佐藤幹夫・木村達雄により得られたが、既約でない場合を完成するのは殆ど不可能というほど難問である。しかし佐藤幹夫はその場合も部分的な結果を出した。本研究では、それを大きく発展させた。また別の観点からもいくつかの場合の分類を得た。その他分類をするための道具もいくつか開発した。

研究成果の概要（英文）：The basic theory of prehomogeneous vector spaces was first obtained by Mikio Sato, and later many mathematicians have been developing this theory. This has been investigated by number theoretical method, algebra-analytic method or representation theoretical method. There are applications to the theory of zeta functions etc. Hence it is an important problem to classify them to know what kind of examples exist. The first result was a classification of irreducible prehomogeneous vector spaces obtained by Mikio Sato and Tatsuo Kimura. However a classification problem is very difficult and some mathematicians say impossible. But Mikio Sato has some result even for non-irreducible case. In our work, we developed a lot his results. We have also classified some prehomogeneous vector spaces with the different view point from M. Sato's research. We also find some tools such as PV-equivalences.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群の表現論

1. 研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間の概念は 1961 年に

Princeton 高等学術研究所に滞在中に佐藤幹夫により導入され、相対不変式の複素巾のフーリエ変換や b-関数、ゼータ超関数などの理

論が作られ、また理論を実際に適用するために、既約概均質ベクトル空間の分類の研究も殆ど同時期から始められた。

そしてスピノ群が関係する空間と例外型代数群が関係する空間の分類が10年以上未解決であったが、それは木村達雄により解決され、既約の場合の分類が完成した。

木村達雄はその論文で既約で有限軌道を持つものも分類した。

V. G. Kac は群が一般線形代数群の直積になっている場合に、有限軌道をもつ空間（それは必ず概均質ベクトル空間になる）を分類した。それに刺激を受けた木村達雄は大学院生らと共に、一般の reductive 概均質ベクトル空間で有限軌道を持つものを完全に分類した。

また木村達雄は当時の大学院生らと群がひとつ、あるいは二つの単純代数群の直積となる場合の分類を完成した。

しかし完全な解決をしたのは以上であり、三つの単純代数群の直積の場合は、非自明な場合しか完成していない。

また既約成分が二個の場合の概均質ベクトル空間の分類は笠井伸一により研究されたが、これも本質的に非自明な場合しか出来ていない。

一方 V. G. Kac はクイバーの空間が概均質ベクトル空間になる必要十分条件を無限次元リ一感のルート系の条件で表した。

それを元に、具体的な数値を入れたクイバーが概均質ベクトル空間か否かを簡単に判定するソフトも作られた。

2. 研究の目的

以上のような状況下で分類を少しでも進めて新しい概均質ベクトル空間を分類するのが目的である。また分類する手段として裏返し変換（これは既約概均質ベクトル空間の分類の生命線というべきものである）以外の色々な新しい概均質同値を発見することは、分類を進める上で不可欠である。また概均質ベクトル空間の分類の応用なども考える。

3. 研究の方法

まず代数群は reductive であると仮定するのは自然である。それ以外の代数群は本質的にまだ分類されていないからである。

既約でない reductive 概均質ベクトル空間の分類は、群の単純成分の個数を増やす方法、あるいは既約成分の個数を増やす方法の他に、佐藤幹夫のアイデアによる方法がある。

(1) 佐藤幹夫の分類は見かけ上、特殊な条件下でやっているように見えるが、それがもし完成すれば、実は分類が完成するという事は黒澤恵光が指摘した。

佐藤はある不変量 k が $0, 1, 2$ のいずれかであることを証明した。 $k=0$ の場合はすぐわかる。佐藤は $k=2$ の場合の分類を完成した。従って $k=1$ の場合が残っており、それは単純代数群と対応する。

そこで、その単純代数群が例外型代数群の場合をまず完全に分類する。

古典代数群の場合、とくに特殊線形代数群の場合には本質的に難しい場合を含むが、現段階ではその場合の分類は不可能に近いので、我々は古典代数群の場合は特殊線形代数群以外の場合、すなわちスピノ群（直交群を含む）や斜交群の場合という条件をつけて分類する。

このようにして佐藤幹夫の方法による分類を発展させる。

(2) 一方既約概均質ベクトル空間は reduced な空間から裏返し変換を有限回繰り返して得られる。そして reduced な既約概均質ベクトル空間の代数群の多くが $G \times GL(n)$ で $n=2, 3$ の形をしていて表現が $\rho \circ \Lambda_1$ の形であることに着目して、代数群の形が、 $G \times GL(n)$ で各既約成分が $\rho \circ \Lambda_1$ という形と同値になるような既約でない場合の分類を調べることも意味があると思われるので、この立場からも分類を研究する。

(3) また応用性のある概均質ベクトル空間の分類も意味があると思われるので、大島利雄の研究による超幾何関数に関する概均質ベクトル空間の分類を調べる。

(4) 既約の場合は裏返し変換と呼ばれる概均質同値が本質的であったが、既約でない場合はそれ以外の色々な概均質同値を発見することは不可欠である。そこで色々な概均質同値を研究する。とくに佐藤—森変換の一般化が重要であると思われる。

(5) また種々の概均質同値でどのくらい概均質ベクトル空間の性質が保たれるかを調べる必要がある。とくにゼータ関数の理論に不可欠な正則性が、種々の概均質同値で保たれるか否かを調べることは必要である。

(6) 概均質ベクトル空間の応用、とくに分類の応用として、ベクトル空間とは限らない代数多様体の概均質性を、ベクトル空間の概均質性に帰着させることの可能性を研究する。

4. 研究成果

(1) 佐藤幹夫による一般の reductive 概均質ベクトル空間の分類に現れる不変量 $k=0, 1, 2$ において $k=0, 2$ の場合は、分類が既に完成していたが、本研究により $k=1$ の場合の研究が

進んだ。

$k=1$ の場合は単純代数群にそれぞれ対応するが、まず単純代数群が例外型線形代数群である場合、すなわち G_2 型、 F_4 型、 E_6 型、 E_7 型、 E_8 型の場合の分類を完成させることが出来た。

さらに単純代数群が古典型だが特殊線形代数群でない場合、すなわち B_n 型、 C_n 型、 D_n 型の場合には、extreme という条件をつけて分類を完成させることが出来た。これは 2 既約成分を持つ自明型の概均質ベクトル空間の分類を研究している途中で得られた結果を用いたものである。残念ながら 2 既約成分を持つ概均質ベクトル空間の分類を完成させることは出来なかったが、その研究成果の応用として extreme の場合の分類を完成させることが出来たのである。

(2) 代数群の形が $G \times GL(n)$ の形で既約成分が $\rho \otimes \Lambda_1$ (ρ は既約) と同値ならば、その表現は $\rho \otimes \Lambda_1 + \sigma \otimes \Lambda_1^*$ の形になる。ここで ρ や σ は既約とは限らない。これは分離形という条件をつけて完成させることが出来た。それはまず新しい概均質同値の発見 (⑤の論文の命題 3.5) とその応用による余次元の和の制限 (⑤の論文の命題 3.6) により可能になった。

(3) 超幾何関数が関係するある特別な形をした空間の概均質性を調べた。それは②で発表された。

(4) $(G \times GL(n), \rho \otimes \Lambda_1 + \sigma \otimes \Lambda_1^*, M(a, n) \otimes M(b, n))$ において $a \leq n, b \leq n$ の場合は佐藤一森変換により $(G, \rho \otimes \sigma, M(a, b))$ と概均質同値になることが佐藤幹夫や森重文により得られているが、今回は $a < n < b$ の場合の概均質同値を得た。これは木村一上田一吉垣の定理の一般化である。なお等号が入った場合は易しい。

(5) 色々な概均質同値すなわち、直和、自明な概均質ベクトル空間による接着、裏返し変換やその一般化、佐藤一森変換とその一般化、Symplectic 概均質同値、Orthogonal 概均質同値の場合の相対不変式の対応や正則性の対応などを調べた。その結果は③にまとめられた。

(6) $m \times n$ 行列全体 $M(m, n)$ に群 G が作用している場合に、階数が r も行列全体 R は代数多様体ではあるが、もはやベクトル空間ではない。それに対しても群 G は作用するが、このとき R が概均質多様体になるかどうかの判定はそう簡単ではない。しかし、この多様体の概均質性は、あるベクトル空間の概均質性に帰着することがわかった。この成果はアメリカ

数学会の紀要に掲載された。

(7) 普遍推移性を持つ概均質ベクトル空間では、井草準一の定理により乗法的アデル・ゼータ関数と加法的アデル・ゼータ関数が一致するので、すべての素点にわたるオイラー積が関数等式を持つ。有限軌道を持つ reductive 概均質ベクトル空間では超局所計算法が使えて無限素点での関数等式を計算出来る可能性がある。そのとき岩沢-Tate の理論が成り立つので、有限軌道を持ち、かつ普遍推移性を持つ空間は重要であるが、この空間を研究代表者が指導する大学院生 Inhyun Ryu と完成させた。

(8) ガブリエルの定理を重み付きクイバーまで拡張すると G_2 型や F_4 型が出てくるが、この場合本質的に体の有限次拡大が出てくるので、代数閉体では出来ない。そこで概均質ベクトル空間を等方部分群の次元を使って定義すると、傾加群との関係が出てくるが、この概均質ベクトル空間たちを傾加群によって分類した。ある意味で新しい視点の分類である。これを研究代表者が指導する大学院生石井佑来美と完成させた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① 大内将也、濱田倫郎、木村達雄、On prehomogeneity of a rank variety, Proc. Amer. Math. Soc, 査読有、140 巻、2012, 4127-4129
- ② 木村達雄、小木曾岳義、大内将也、A classification of some prehomogeneous vector spaces related with hypergeometric functions, Josai Math. Monograph, 査読有、5 巻、2012, 89-111
- ③ 木村達雄、小木曾岳義、黒澤恵光、大内将也、Prehomogeneous vector spaces and their regularity, Josai Math. Monograph, 査読有、5 巻、2012, 71-88
- ④ 木村達雄、黒澤恵光、柴田大樹、A note on some PV-equivalence, 査読有、Far East J. Math. Sci. 63 巻、2012, 269-280
- ⑤ 木村達雄、竹田大佑、神吉知博、大内将也、濱田倫郎、大津利之、A classification of reductive prehomogeneous vector spaces $(G \times GL(n), \rho \otimes \Lambda_1 + \sigma \otimes \Lambda_1^*)$ ($n=2, 3$) of separated type with full scalars, J. Algebra, Number theory: Advanced and Applications, 査読有、5 巻、2011, 73-106

- ⑥ 木村達雄、石井佑来美、Inhyun Ryu、濱田倫郎、黒澤恵光、大内将也、神吉知博、
On M. Sato' s classification of some reductive prehomogeneous vector spaces, Publ. RIMS、査読有、47 卷、2011、397-418
DOI 10.2977/PRIMS/40

〔学会発表〕(計 1 件)

木村達雄 Vinberg の定理について
研究集会「概均質ベクトル空間の分類とその応用」つくば国際会議場 2011 年 2 月 5 日

5. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 達雄 (KIMURA TATSUO)
筑波大学 名誉教授
研究者番号 : 30022726