

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2010～2012  
 課題番号：22540010  
 研究課題名（和文） 頂点作用素代数の表現論にもとづく共形場理論の構成  
 研究課題名（英文） Construction of Conformal field theory based on Representation theory of Vertex Operator Algebra  
 研究代表者  
 土屋 昭博（AKIHIRO TSUCHIYA）  
 東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・上級科学研究員  
 研究者番号：90022673

研究成果の概要（和文）：互いに素な 2 以上の正の整数の組  $(p_+, p_-)$  に対し、拡大された  $W$  代数と呼ばれる頂点作用素代数を定義し、①その Zhu 氏による有限性定理を証明し、②その既約表現のすべてを構成した。

研究成果の概要（英文）：For each pair of relationally prime positive integer  $p_+, p_-$ , which are  $p_+, p_- > 2$ , we defined Vertex operator algebras called Extended  $W$  algebra. And we showed that ① they satisfied Zhu's finiteness conditions, and ② constructed all the irreducible modules.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
22 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
23 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
24 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：頂点作用素代数・共形場理論

## 1. 研究開始当初の背景

共形場理論は、1990 年代始め頃にロシアの物理学者により統計物理学における 2 次元臨界現象を記述する理論として始められた。その後数学側からもヴィラソロ代数やアフィン・リー代数の表現論をリーマン面の Moduli 空間やリーマン面のプリンシパル束の moduli 空間上に展開することにより代数解析における  $D$ -加群の方法を使うことよりリーマン面上の共形場理論が展開された。このことに

より、ブレイド群や写像類群の表現が共形ブロックの monodromy 表現として現れ、低次元トポロジーにおけるノット、リンクや 3 次元多様体の量子不変量との関係も明らかになった。一方、ブレイド群の表現は一の巾根におけるヘッケ環の表現を生み出し、量子群の表現論と関係が付き、数理論理学と現代数学を結びつける重要な位置を確立した。共形場理論における最も重要な概念である場の作用素の局所性や作用素展開は頂点作用素代数

として代数化され、頂点作用素代数の表現論の研究と対応する共形場理論の研究が新たな研究分野として浮かび上がってきた。

頂点作用素代数により、リーマン面上の共形場理論が展開されるためには、頂点作用素代数が適当な有限性条件が課される必要がある。このような条件として1990年代始め、Zhu氏により提案された $C_2$ -有限性条件がある。私は2000年代始めより、この $C_2$ -有限性条件を持つ頂点作用素代数の構造と表現論および対応する共形場理論の研究を始めた。

## 2. 研究の目的

(1) 共形場理論を基礎としている頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏がArtinかつNoether, 単純対象の数が有限個であるが半単純とならない場合に展開する。この場合、表現論は1の中根の場合の量子群やAffine Hecke環の半単純でない表現論と密接に結びつく(Kazhdan-Lustig対応)。更に、共形場理論を自由場とScreening作用素を超平面配置上の局所係数のホモロジー論を使って積分表示をすると基本方程式であるK-Z方程式系の解の表示が得られる。頂点作用素代数や量子群の表現論、K-Z方程式を中心とする代数解析Affine Grassman等の無限次元等質空間のTopologyが相互作用し、非常に面白い側面を持っている。

(2)  $C_2$ -有限性条件をみたす頂点作用素代数を自由場表示とスクリーニング作用素を用いて構成する。また、表現のなすアーベル圏の構造を明らかにする。更に、この表現論に基づいて一般リーマン面上に共形場理論を構成する。この場合、頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏の単純対象の数は有限個であるが、表現の圏は半単純にならない。このため理論の構造は複雑になるが、より興味深くなる。

(3) 具体的には、ADE型単純リー環と互いに素な正の整数の組に対し、拡大 $W$ 代数と呼んでいる頂点作用素代数を構成し、その性質を調べることを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) 互いに素な2以上の正の整数の組  $[p, q]$  に対して定義される頂点作用素代数  $W[p, q]$

について、①  $C_2$ -有限性を証明し、② 単純対象、射影対象のすべてを構成し、表現のつくるアーベル圏の構造を決定し、③ 射影直線上の共形場理論を使って定義されるFusion Tensor積の構造を明らかにする。また、④ 1の中根における量子群やAffine Hecke環の表現論に関するKazhdan-Lustig型の対応原理を明らかにする。さらに、⑤ 楕円曲線上の共形場理論のMonodromy表現より生じる $SL_2(\mathbb{Z})$ の表現とBraided monoidal圏との関係に関するVerlinde型定理の形を明らかにする。

(2) さらに、ADE型単純リー環に関して定義される頂点作用素代数 $W(\mathfrak{g})[p, q]$ の場合に拡張する。上記(1)(2)における基本的道具たちは、射影直線の配置空間上の局所係数をもつホモロジー論およびコホモロジー論である。この上で $N$ 個のScreening作用素の積を積分することによって得られるVirasoro代数の表現の間のまつわり作用素の応答を丁寧に調べることで理論が展開される。この過程で1の中根における量子群やAffine Hecke環等の量子代数の表現の関係が明らかにされる。

(3) 単純リー環が $sl_2(\mathbb{C})$ の場合には、昨年度 $M_{p+,p}(\mathfrak{g})$ を構成し、 $C_2$ -有限性を証明し、単純対象の分類と構成を行った。更に、射影対象の構造の決定、単純対象や射影対象の間のFusion積の決定を行う。

(4) 一般のADEの場合に $sl_2(\mathbb{C})$ の場合に行ったことを拡張する。リー環のランクが $r$ の場合Screening作用素の数は $2r$ 個になり、Screening作用素の積分を行うべき超平面配置上の局所係数付きのホモロジー論、コホモロジー論は複雑になるが、基本的にはScreening作用素の積で定義されるまつわり作用素間のセール関係式が重要であり、基本的には $\mathfrak{g}=sl_3$ の場合に帰着される。これらをつくって $M_{p+,p}(\mathfrak{g})$ の $C_2$ -有限性を証明する。このまつわり作用素を定義するために超平面配置局所係数付きホモロジー群、コホモロジー群が必要である。この群は大変複雑であるが、パラメータを変形し、積分をJack多項式と関係づけることにより、この困難を解消した。

## 4. 研究成果

(1)  $sl_2$ 型triplet  $W$ -代数 $W_p$ ,  $p=2, 3, \dots$ について、表現の圏 $W_p\text{-mod}$ は $W_p\text{-mod}$ に付随した共形

場理論の存在により braid monoidal category になる。また、私は永友氏と共同で abel 圏  $W_p\text{-mod}$  は  $q=e^{\pi i/p}$  の場合の  $sl_2$  型量子群  $U_q(sl_2)$  の有限時限表現のつくる abel 圏と同値であることを示した。その後、私は Simon Wood 氏と共同で  $W_p\text{-mod}$  における単純対象と射影対象の間の fusion tensor 積を具体的に計算し、これらの対象の fusion tensor 積は単純対象と射影対象の直和であることを示した。このことにより、さらに braided monoidal category  $W_p\text{-mod}$  は rigid かつ ribbon であることを示した。このことは 2011 年 3 月福岡で開かれた国際共同研究集会で報告した(学会発表)。このことは多くの物理学者により観察・予想されていたものである。このことにより、 $W_p\text{-mod}$  に associate 共形場理論における種数 1 の共形ブロックにおける  $sl_2(z)$  の表現と fusion tensor 積の構造定数の間の関係についての Verlinde 型の定理の形が見えてきた。

(2) A. D. E. 型単純リー環  $g$  と互いに素な正整数の組  $(p_+, p_-)$  に対して格子頂点作用素代数と  $2p$  個の screening 作用素を使って  $g$  型の triplet  $W$ -代数  $W_{p_+, p_-}(g)$  を定義し、その  $C_2$ -有限性を証明し、さらに対応する abel 圏の構造を解析する。このためには、screening 作用素の積の積分に関連してその詳しい性質が必要である。これは複素平面の点の配置空間の局所素数の de Rham 積分理論の性質に帰着される。これを Factorizable sheave のつくる tensor 圏と関連して考察を進めている。

(3)  $sl_2$  型の triplet  $W$ -代数  $W_p$ ,  $p=2, 3, \dots$  は、現在知られている  $C_2$ -有限性を満たし、かつその表現のつくる abel 圏が半単純にならない数少ない頂点作用素代数である。 $W_p$  に付随して構成される  $P^1$  上の共形場理論における fusion tensor 積を使って abel 圏  $W_p\text{-mod}$  は braided monoidal category の構造を持つ。私は Simon Wood 氏と共同で単純加群と射影加群の間の fusion tensor 積を具体的に計算し、これらが単純加群と射影加群の直和となることを示した。この結果については 2011 年 6 月に北京で開かれた国際研究集会で講演を行い報告した。

(4) さらに、互いに素な正の整数の組  $(p_+, p_-)$  に付随して定義される頂点作用素代数  $W_{p_+, p_-}$  についても、Simon Wood 氏と共同でこれが  $C_2$ -有限性を満たすことを示した。現在これをさらに深めて、単純加群と射影加群の構成問題の解決をしようとしている。このため、 $W_p\text{-mod}$  の abelian category として構造解析を行った。具体的には、 $W_p$ -加群について

の永友・土屋で用いた方法を自然に  $W_{p_+, p_-}$ -加群の場合に拡張して、単純加群の構成およびその射影拡張を構成することが出来る。このことにより、 $W_{p_+, p_-}\text{-mod}$  の abel 圏の構造が記述される。

(5) まつわり作用素を定義するのに必要なねじれたコホモロジー群の複雑さを回避するため、係数を複素数体から 1 変数形式的巾級数環にもちあげ、Jack 多項式の理論との関係づけにより まつわり作用素の構成を定義し、既約表現のすべてを定義し、その構造を解析した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, The tensor structure on the representation category of the  $W_p$  triplet algebra, arXiv:1201.0419
- ② Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, On the extended  $W$ -algebra of type  $sl_2$  at positive rational level, arXiv:1302.6435
- ③ Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, The tensor structure on the representation category of the  $W_p$  triplet algebra, arXiv:1201.0419

[学会発表] (計 2 件)

- (1) 土屋 昭博, Conformal Field Theory and Quantun Group, 2011 年 3 月 16 日, 日本数学会春期 Low dim Topology and Number Theory III, 九州大学
- (2) Akihiro Tsuchiya, Conformal Field Theory and Quantun Group, 2011.6.17, 国際会議 Conformal field theories and tensor categories, Beijing, 中国

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：

番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

土屋 昭博 (AKHIRO TSUCHIYA)  
東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・  
上級科学研究員  
研究者番号：90022673

### (2) 研究分担者

( 0 )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( 0 )

研究者番号：