科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２０日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540012
研究課題名（和文）　ユニタリ・ヤコビ形式と原始的テータ関数の研究

研究課題名（英文）　Unitary Jacobi forms and primitive theta functions

研究代表者
菅野　孝史（SUGANO TAKASHI）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：30183841

研究成果の概要(和文)：極大偶対称行列を指数とするヤコビ群のヘッケ環の構造を決定し，各既約表現に対応する帯球関数を求め，更に，非可換ヤコビ・ヘッケ環と二面体群の群環との関係を示した（橋詰哲靖氏との共同研究）．また，大域的な問題として，レベルが 2,3 の 2 次パラモジュラー保型形式のなす環について，テータ・リフトとクリンゲン型アイゼンシュタイン級数を用いる新しい生成系を求めた（岩堀雄樹氏との共同研究）．

研究成果の概要(英文)：We determined the structure of Jacobi Hecke algebra whose index is a maximal even integral matrix and obtained zonal spherical functions corresponding to irreducible representations of the Hecke algebra, moreover, we showed a relation between a non-commutative Jacobi Hecke algebra and the group ring of a dihedral group (joint work with N. Hashizume). As a global problem, we gave a new system of generators for the ring of paramodular forms of degree 2 and level 2 or 3, by using theta lifts and Klingen Eisenstein series (joint work with Y. Iwahori).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,000,000	300.000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：整数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ユニタリ群，ヤコビ形式，保型Ｌ関数，Hecke 環

１．研究開始当初の背景

1 変数保型形式を扱うに際し，Fourier 展開は理論的にも応用面からも基本的であり，保型形式の多くの情報が Fourier 係数の言葉を用いて取り出される．例えば，Hecke 作用素の固有関数であることが，Fourier 係数の簡明な漸化式の形で記述される．これは，Siegel 保型形式や直交群上の保型形式の場合も同様である．

一方，3 次ユニタリ群上の保型形式 F の場合，群が作用する領域（2 次元超球に同型）

が tube domain でないため，十分な平行移動がなく，部分 Fourier 展開（Fourier-Jacobi 展開）されるにとどまる．この際，m 番目の展開係数 F_m は定数ではなく，指数 m のテータ関数の空間 T_m に属する．

新谷卓郎氏は，原始的テータ関数の概念を導入し，それを用いて詳しい Fourier-Jacobi 展開を与えた(1979)．原始的テータ関数は，低い指数のテータ関数からシフトされる部分空間の補空間を，U(1)の Weil 表現で分解することによって得られる．重要な点は，固有値（量指標）を与えたとき，原始的テータ関数は高々1次元であることである．従って，F_m を原始的テータ関数で展開することにより，複素数からなる展開係数を考えることができ，F が Hecke 作用素の固有関数であるための条件が漸化式の形で記述される．新谷氏の仕事は，その後多くの人により精密化された（Glaubermann and Rogawski : 1989, Moen: 1991, Murase and Sugano: 2000．更に，Eisenstein 級数や1変数保型形式からのリフト（Kudla リフト）について，その展開係数が求められている(Murase and Sugano: 2007)．

２．研究の目的

このような原始的テータ関数の理論を，U(n+1,1) の場合に求めることが主テーマである．しかし，n が 2 以上のとき U(n) は非可換で，テータ関数の空間を U(n) の Weil 表現で完全に分解するという方向は，困難と思われる．そこで本研究では，ユニタリ・ヤコビ形式を用いた，別のアプローチを試みる．

K を判別式 D の虚2次体，R を符号(n+1,1)のエルミート形式とし，そのユニタリ群を G とする．G の放物部分群 P の unipotent radical を N とする．標準的な極大コンパクト群に関する重さ k の正則尖点形式 F を N の中心に関し Fourier 展開し，その m 番目の Fourier 係数 F_m で表す．n 次ユニタリ群と N の半直積(ユニタリ・ヤコビ群)上の index m の保型形式（ユニタリ・ヤコビ形式）f をとり，F_m と f のユニタリ・ヤコビ群上での内積により，Whittaker-Shintani 関数を定義する．

本研究の目的は，次の二点である．

(1) 非簡約代数群であるユニタリ・ヤコビ群の Hecke 環を用いて，ユニタリ・ヤコビ形式の良い基底を求めること(これが n=1 の場合の原始的テータ関数の一般化である)．

(2) 上記の Whittaker-Shintani 関数のトーラス上の積分を，F と f の L 関数の言葉で記述すること．

３．研究の方法

(1) 原始的テータ関数の良い基底について

index m のユニタリ・ヤコビ形式の空間を V_m とする．これは古典的なテータ関数 T_m の幾つかの直和となる．素数 p が m に関する bad prime であるとは，p が K において惰性的なときは p^2 が m を割り切ること，分解または分岐するときは p が m を割り切ることを意味する．このような p においては，index shift により，小さな index のテータ関数からきているものがある．これら old form の直交補空間として new form の空間 V_m^0 が定義される．この空間は，各 bad prime において，様々な平準化作用素（Hecke 環の冪等元）で零化される部分に相当する．

good prime においては，ユニタリ・ヤコビ群の Hecke 環の中心がテータ関数の空間に正規に作用し，同時固有関数からなる基底をとることができる．しかしながら bad prime での作用素としては，new form を切り取る平準化元だけでは不十分でる（平準化元は “conductor” を指定することに対応している）．これを更に切り分けるために，Hecke 環のどのような元が重要であるかを探索する．ひとつのアプローチとして，原始的テータ関数の構造が分かっている n = 1 の場合に，古典的なテータ関数を用いて具体例を検討する．

(2) Whittaker-Shintani 関数とそのトーラス上の積分について

符号（n+1,1）のユニタリ群上の正則尖点形式 F とユニタリ・ヤコビ形式 f から決まる Whittaker-Shintani 関数を調べる．index m に関する good prime については，F，f がそれぞれの Hecke 環の中心の同時固有関数のとき，トーラス上の局所積分は F，f の L 関数の比で記述されるはずであり，まずこの部分をきちんと調べる．

次に，bad prime における処理に進む．F は Hecke 環の固有関数とし，f は平準化作用素で消えているという条件のみで，積分計算を詳細に検討する．1 変数保型形式の場合が示唆するように，bad prime での局所 L 関数は，保型形式・保型表現の情報をかなり落としたものとなっている．従って，詳細な積分計算により，局所 L 関数の候補やそれを記述するために必要な作用素が見出されるのではと期待する．(1) で述べた new form の空間の完全な切り分けの前段階としても用いられるだろう．

(3) ヤコビ形式と直交群上の保型形式について

ユニタリ・ヤコビ 形式の bad prime における問題は，ユニタリ・ヤコビ Hecke 環の構造そのものの研究や，平準化作用素の役割・限界の検討を必要とするだろう．そもそも，これらについては通常のヤコビ形式（斜交群と Heisenberg 群の半直積上の保型形式）の場合でも十分には知られていいない．従って，ユニタリ・ヤコビの場合を深く探索するためにも，通常のヤコビ形式や直交群・斜交群上の保型形式について，index を割る素数での議論，conductor 付の保型形式について調べることが必要である．ユニタリ・ヤコビ形式とユニタリ群上の保型形式の組み合わせに比べて，対応する問題は若干易しくなるはずだし，利用できる既知の結果も多い．

次の問題考える．

① 符号(2,n)の maximal even integral な対称行列 S の直交群の保型形式について，Hecke 環の中心の同時固有関数に付随するＬ関数の解析接続･関数等式の完全な記述を目指す．Whittaker-Shintani 関数（一般化 Fourier 係数）を用いた（2 次 Siegel の場合の） Andrianov の手法を用いる．Fourier 係数のパラメータが reduced な場合は，Ｌ関数の積分表示や解析接続・関数等式がえられることは既に得ている．残念ながら，積分表示の初期値が消えないような reduced なパラメータの存在が保証されないことである．従って，問題は，reduced という条件を外した場合の処理である．これは “conductor” が生じることを意味し，ユニタリ・ヤコビ保型形式の場合の問題と密接に関係してくる．

② 斜交群と Heisenberg 群の半直積（通常のヤコビ群）について，index S が maximal even integral という状況下で，その Hecke 環を決定したい．S がユニモジュラーな場合は，通常の Satake 同型による記述が知られているが，S の行列式を割る素数については，一部分しかわかっていない．これは前項(1) の問題を正面から取り組む上では不可欠な前段階の問題である．また，保型Ｌ関数の構成の観点からも，帯球関数を決定することが望ましい．

③ 大域的な問題を考えるときには，保型形式環が具体的にわかっていれば，様々な実験が可能となる．残念ながら，３次ユニタリ群の次元公式は未だ完全なものはガウス数体の場合のみしか知られていない（この場合は,保型形式環も決定されている）．直交群の場合も事態は同様である．ただ,有理数体上で split する符号(2,3) の直交群の場合（2 次のジーゲル保型形式に対応する場合）については，ヤコビ形式からのリフト等を用いて，次元と保型形式環を同時に決定するという巧妙な議論が青木宏樹氏に創始された．この手法を他の場合に適用してみたい．2 次のパラモジュラー保型形式に対応する場合が最初の検討課題である．また青木氏はガウス数体に関する符号 2 次のエルミート保型形式環の決定も行なっているので,符号（2,4）の直交群の場合に，構造が決定できるような例も探索したい．

４．研究成果

前項(1),(2)のアプローチについては，平準化のみの利用では bad prime での議論はほとんど進展しなかった．そのため，当初回避していたユニタリ・ヤコビ群の Hecke 環の構造を正面から取り組むことを決意し，研究期間の後半は主として前項（3）に述べた通常のヤコビ Hecke 環，ヤコビ形式，直交群上の保型形式の考察を行った．

① 直交群上の保型形式のＬ関数：

符号（2,n）の直交群の極大整格子に関する正則尖点形式 F の Fourier 係数が消えない極小のパラメータをとる．これが reduced ならば，n-1 次の負定値直交群の極大整格子が符号（2,n）の直交群に上手く埋め込まれ，F と定値直交群上の保型形式 f から作られる Whittaker-Shintani 関数で初期値が消えないものが存在する．これをトーラス上積分することにより，F のと f のＬ関数の比が得られる．また，f のＬ関数については，既に得られている（村瀬篤氏との共著,1998）ので，target とした F のＬ関数の関数等式・解析接続が閉じた形で得られる．

しかし，パラメータが reduced という条件を外して上記の議論を行うことは難しい（新たに“conductor”が生ずる）．小柳拓也氏との共同研究により，conductor をどの程度までつければ上の議論が進行するか，また．

議論が必要となる箇所を洗い出した．今後はそれぞれの問題点を解決していくつもりである．

② ヤコビ群の Hecke 環の構造：

index が m 次の maximal even integral 対称行列 S の場合に，ヤコビ Hecke 環の構造決定を目指した．1 次の斜交群，即ち SL_2 ヤコビ群の場合に構造を決定した．ここでは簡単のため，p を奇素数として記述する．S の行列式の p-order が 0 の場合は，佐武同型が知られている．また，1 の場合もその構造は既知である（Hecke 環は可換だが，零因子をもつ）．従って，問題は p-order が 2 の場合である．これについて，橋詰哲靖氏との共同研究により，構造を決定することができた．非可換性が生ずる Heisenberg 部分の Hecke 環の構造は，位数 2(p+1) の二面体群の群環を 1 次元のイデアルで割った（2p+1 次元の）半単純多元環となる．合わせて，Hecke 環の中心の各既約表現に対応する帯球関数も構成した．

今後は，一般の斜交群の場合の構造決定，帯球関数の構成を行うとともに，ヤコビL関数の研究に応用したい．また，SL_2 ヤコビ形式の場合，Oda リフトにより直交群上の正則保型形式が構成されるが，そのときの固有値の関係を（現在知られているものより）詳しく決定するという問題にも取り組むつもりである．

③ 分解型符号(2,3) の保型形式環：

判別式が -2N の符号（2,3）対称行列の直交群上の保型形式を考える．古典的準同型より，これは 2 次の斜交群上の保型形式に対応し，レベル N の 2 次パラモジュラー保型形式に一致する（特に，N = 1 のときは 2 次ジーゲル保型形式に一致）．また，N が平方因子を持たな自然数のとき，極大整格子に対応する保型形式となり，特に扱い易い．

一般に，保型形式の次元を求めること，保型形式のなす環の構造を決定することは，膨大な作業を要する．このような状況下で，青木宏樹氏は，2 次ジーゲル保型形式環の構造を，離散部分群のもつ対称性とヤコビ形式を用いた次元の上からの評価及びヤコビ形式からのテータリフト（Oda リフト）を用いて直接決定するという新たな手法を開発した．青木氏の方法を，上記の符号（2,3）の直交群に対して実行し，N = 2, 3 の場合に保型形式環の構造を決定した（岩堀雄樹氏との共同研究）．

構造は既に知られていたが，生成元の構成について，Klingen 型 Eisenstein 級数を利用することなど新たな工夫行い，数論的な保型形式（Hecke 固有関数）からなる生成系を得た．今後は，直交群上の Klingen Eisenstein 級数の Fourier 展開の研究も行うとともに，青木氏の方法の適用範囲の改良にも挑戦したい．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計１件）

① <u>菅野孝史</u>：Oda リフト，第１９回整数論サマースクール（保型形式のリフティング），2011 年９月７日，富士箱根ランド・ルコーレプラザ（静岡県）．

６．研究組織

(1)研究代表者

菅野　孝史　（SUGANO TAKASHI）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：30183841

(2)研究分担者

(3)連携研究者

村瀬　篤　（MURASE ATSUSHI）

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：40157772