様式Ｃ－１９

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月７日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００１３
研究課題名（和文）　有限群のコホモロジー論の研究

研究課題名（英文）　Cohomology theory of finite groups

研究代表者
佐々木　洋城（SASAKI HIROKI）
信州大学・全学教育機構・教授
研究者番号：60142684

研究成果の概要（和文）：有限群の表現論においてブロック・イデアルは主要な考察対象である。本研究においてそのコホモロジー環のブロック・イデアルのソース多元環による特徴付けを与えた。ソース多元環はブロック・イデアルの枢要な普遍量であるがその解析は困難である。本研究ではその加群構造のコホモロジー理論による解析定理を得た。これらをテイム表現型のブロック・イデアルに適用し、そのコホモロジー環およびソース多元環の構造を調べた。

研究成果の概要（英文）：Block ideals are main objects to be investigated in representation theory of finite groups. In this study we gave a characterization of cohomology rings of block ideal in terms of source algebras of block ideals. Source algebras are so important invariants of block ideals. However it is so hard to treat with them; we gave a cohomological criterion for analyzing source algebras. Applying these results to block ideals of tame representation type, we investigated cohomology rings and source algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：数学、数学・代数学
キーワード：コホモロジー環、ブロック・イデアル、有限群

１．研究開始当初の背景
有限群のブロック・イデアルとは有限群の群環の直和因子であり、有限群の表現論の主要な研究対象である。群環の直和因子であるという性格から、有限群との深い関わりを持つと同時に、群環という非常に特徴のあるものではないから、一般の多元環としての見地からの考察も必要である。多元環としての性格と有限群の表現論としての性格を同時に考察する道具として、ブロック・イデアルのコホモロジー環は定義されているが、定義されてからまだ、日も浅く、通常のコホモロジー理論に比べるとその基礎的な部分で未解明な事項が多い。その原因はブロック・イデアルのコホモロジー環は双対複体のコホモロジーとしては捉えられず、従って、期待されるホモロジー代数を展開することができないことである。そこで、ブロック・イデアルのコホモロジー理論をホモロジー代数学が展開できる形に整備したい。それには、ブロ

ック・イデアルに新しい光をあてることが必要である。

２．研究の目的

(1) Brauer 対応で対応するブロック・イデアルのコホモロジー環の関係を調べること。特に、コホモロジー環の間に restriction 写像、corestriction 写像を定義すること。
(2) ブロック・イデアルのディフェクト群のコホモロジー環の極大イデアル・スペクトラム構造からブロック・イデアルのコホモロジー環の構造を知ること。

３．研究の方法

対称多元環の表現論と Hochoschild コホモロジー環の理論の応用、ブロック・イデアル（特にソース多元環）の解析、具体的なブロック・イデアルのコホモロジー環の解析を連携研究者と共同しつつ行った。

４．研究成果

G を有限群とする。k を標数 p の代数的閉体とし、p は G の位数を割り切るとする。B を群環 kG のブロック・イデアルとし、D を B のディフェクト群、S をソース多元環とする。F(B;D,S)を B の（ディフェクト群 D とソース多元環 S から定められる）Brauer 圏とする。D の部分群とその中心化群のブロック・イデアルの対を Brauer 対とよぶが、有限群での部分群に相当する役割をブロック・イデアルの理論で果たすものである。Brauer 圏とは Brauer 対を対象とし、射は Brauer 対の fusion である。ブロック・イデアル B のコホモロジー環 H(B;D,S)は D のコホモロジー環 H(D,k)の部分環であって、Brauer 圏 F(B;D,S)について安定な元から構成される。

(1) 次の定理を示した。

定理
D のコホモロジー環 H(D,k)の元の D の群環 kD の Hochoschild コホモロジー環 HH(ｋD)への埋め込みがソース多元環 S について安定ならば、その元は B のコホモロジー環 H(B;D,S)に属する。

ブロック・イデアルのコホモロジー環の創始者である Linckelmann による定理（H(B;D,S)に属する元の HH(ｋD)への埋め込みは S について安定である）と合わせて、B のコホモロジー環のソース多元環による特徴付けを与えたことになる。

(2) しかしながら、一般にソース多元環の構造を知ることは困難であって、ソース多元環が調べられているブロック・イデアルは極めて少ない。ソース多元環 S は群 G の(D,D)両側剰余類から定義される加群 k[DgD]の直和に分解されるのであるが、どの k[DgD]が S の直和因子として現れるかを判定する方法は知られていなかった。本研究により、次の定理がわかった。

定理
両側剰余類 DgD から定義される H(D,k)の移送写像が 0 写像でなく、かつ DgD が定める Brauer 対がある条件を満たせば、(kD,kD)両側加群 k[DgD]はソース多元環 S の直和因子に同型である。

ソース多元環の加群としての構造について知られていたのは極大 Brauer 対の安定部分群に属する元を含む両側剰余類から定義される直和因子のみであったから、この定理の意義は大きい。また、コホモロジー理論の表現論への応用としても興味深い。

(3) テイム・表現型のブロック・イデアル B のコホモロジー環はすでに、計算していた(2006 年)。その結果、H(B;D,S)は D のコホモロジー環 H(D,k)からのある写像の像として捉えられることを示していた。　この写像の定義を(2)で得られた定理を用いて解析することにより、この写像はソース多元環 S の直和因子から定義されることがわかった。さらに、テイム表現型のブロック・イデアルのソース多元環の直和因子として現れる可能性のある k[DgD]から導かれる Brauer 対の融合を詳しく解析し、とそれから定義されるコホモロジー環の移送写像を調べることにより、ソース多元環 S によって定義される移送写像は 2006 年に我々が構成した写像の構成因子のみによって記述できることがわかった。一般に、どのブロック・イデアルに対してもソース多元環から定義される移送写像の像として H(B;D,S)が捉えられると予想しているが、この予想の解決に向けての自明でない第一歩である。

さらに、次の定理が得られた。

定理
B がテイム・表現型のブロック・イデアルならば、そのソース加群 S の直和因子 M で次の条件を満たすものが存在する：

(i) H(D,k)の元が B のコホモロジー環 H(B;D,S)に属するためには、その Hochoschild コホモロジー環 HH(ｋD)への埋め込みが M について安定である

ことが必要十分である。
(ii) H(B;D,S)はMが定義するDのコホモロジー環 H(D,k)から移送写像の像に一致する。

この事実は、一般のブロック・イデアルに対しても成り立つのかもしれない。

(4) HをGの部分群とし、Hのブロック・イデアルCのGへのBrauer対応が定義され、それはBと一致し、DはCのディフェクト群であるときを考える。
Hのブロック・イデアルCのコホモロジー環を考察するためには、Cのソース多元環を指定しなければならない。Bのソース多元環 S に対して C のソース多元環を Green 対応で対応しているように選ぶことができる。このとき、Bのコホモロジー環 H(B;D,S)と C のコホモロジー環 H(C;D,T)との関係を調べたい。そのために、これらの間に restriction 写像、corestriction 写像を構成することが目標であった。部分群 H として B のディフェクト群 D をとったとき、coresriction 写像は(3)で述べた H(D,k)の写像である。テイム表現型のブロックに対しては2006年の解析により、corestriction 写像を定義できていたが、その意味を解明し、これを手掛かりとして、一般の correstriction 写像を定義することにつなげたい。
restricion 写像について次がわかった。Hのブロック・イデアルCを(kH,kH)両側加群とみて、CのG×HへのGreen対応ととる。Lは(kG,kH)両側加群である。この加群は非常に有用である。Hおよび C がよい条件をみたせば、H(B;D,S)は H(C;D,T)に含まれるのであるが、その埋め込み写像は、Hochoschild コホモロジー環 HH(B)から HH(C)への(kG,kH)両側加群 L が定義する移送写像から引き起こされるのである。(2005年度～2007年度科研費助成研究)　この埋め込み写像は restriction 写像である。
さて、さらに、次の定理を得た。

定理
H(B;D,S)が H(C;D,T)に含まれるためには、H(B;D,S)の Hochoschild コホモロジー環HH(ｋD)への埋め込みがCのソース多元環TとLとBのソース多元環Sとによって定義されるある(kD,kD)両側加群 N について安定な部分環に含まれることが必要十分である。

Hochoschild コホモロジー環 HH(ｋD)の N 安定部分環は S 安定部分環より小さいから、これはブロック・イデアルのコホモロジー環をさらに精密にとらえることにつながるという意義をもつ。

(5) G が p-可解群であるとき、H(B;D,S)の極大イデアル・スペクトラムと H(D,k)の極大イデアル・スペクトラムとが一致すれば、Bはベキ零ブロックであることがわかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① <u>渡邉 アツミ</u>、On blocks of finite groups with central hyperfocal subgroups, J. Algebra, 368, 358-375 (2012), 査読有
② <u>奥山 哲郎</u>、清田正夫、和田倶幸、The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups, J. Algebra, 368, 329-344 (2012), 査読有.
③ <u>佐々木 洋城</u>、Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory, 印刷中 (published online 12 May 2012、DOI:10.1007/s10468-012-9345-3、査読有.

〔学会発表〕（計14件）

① <u>飛田 明彦</u>、Extraspecial p-群のコホモロジーへの両側Burnside環の作用について、日本数学会年会、京都大学、2013年3月22日
② <u>佐々木 洋城</u>、テイム・ブロックのコホモロジー環、日本数学会年会、京都大学、2013年3月22日
③ <u>飛田 明彦</u>、Cohomology of the extraspecial p-group and representations of the double Burnside algebra、有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組み合わせ論の研究、京都大学、2013年1月9日
④ <u>奥山 哲郎</u>、Principal 3-block algebras of some finite groups with Sylow 3-subgroup M(3)、有限群の表現論およびその周辺、浜松市、2012年9月1日
⑤ <u>佐々木 洋城</u>、Cohomology rings of some 2-blocks、有限群の表現論およびその周辺、浜松市、2012年8月31日
⑥ <u>渡邉 アツミ</u>、On p-power extensions of cyclic defect blocks of finite groups、有限群の表現論およびその周辺、浜松市、2012年8月31日
⑦ <u>奥山 哲郎</u>、Relative projective covers and the Brauer construction over

finite group algebras、有限群のコホモロジー論とその周辺、京都大学、2011 年 9 月 1 日
⑧ 飛田　明彦、有限群の両側 Burside 環の表現論、有限群のコホモロジー論とその周辺、京都大学、2011 年 8 月 30 日
⑨ 渡邉 アツミ、部分群と超焦点部分代数、第 56 回代数学シンポジウム、岡山大学、2011 年 8 月 8 日

６．研究組織
(1)研究代表者
佐々木　洋城 (SASAKI HIROKI)
信州大学・全学教育機構・教授
研究者番号：60142684

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
渡邉　アツミ (WATANABE ATUMI)
熊本大学・理学部・教授
研究者番号：90040120

奥山　哲郎　(OKUYAMA TETSURO)
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：60128733

飛田　明彦 (HIDA AKIHIKO)
埼玉大学・教育学部・教授
研究者番号：50272274