

平成 26 年 4 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540018

研究課題名(和文) 局所ラングランズ予想と調和解析の研究

研究課題名(英文) Study of local Langlands conjecture and harmonic analysis

研究代表者

平賀 郁 (Hiraga, Kaoru)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：10260605

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：数論の重要な問題としてラングランズ予想と呼ばれているものがある。これは簡約代数群という良い範疇の群の表現と体の拡大を統制しているガロア群の表現との間の関係を予想するものである。本研究においては簡約代数群の表現とガロア群の表現の不変量の関係とみなせる $SL(N)$ の Kottwitz-Shelstad 予想を証明した。また、ラングランズ予想の重要な一部にエンドスコピーと呼ばれるものがある。本研究においては、 $SL(2)$ の被覆群のエンドスコピーを研究し、コーネン・プラス空間の概念を拡張した。

研究成果の概要(英文)：The Langlands conjecture is important in the field of number theory. It predicts a good relation between the representations of the reductive groups and the Galois representations. In this research, the Kottwitz-Shelstad conjecture, which can be regarded as a relation between an invariant of a representation of $SL(N)$ and an invariant of the corresponding Galois representation, is proved. On the other hand, one of the important parts of the Langlands conjecture is the endoscopy. In this research, the endoscopy for the covering groups of $SL(2)$ is studied and the Kohnen plus space is generalized to the totally real number field case.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：エンドスコピー

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の状況として、研究開始以前に $GL(n)$ の局所ラングランス予想が Harris-Taylor, Henniart により証明され、次の目標として古典群の局所ラングランス予想が考えられている状況であった。

ここで、一般の簡約代数群の局所ラングランス対応においては、パラメータと簡約代数群の既約表現との間の対応は 1 対 1 ではなく、簡約代数群の既約表現の集合であるパケットを考えなければいけないことが分かっていた。また、数論的に重要なパケットの内部構造は S -群とエンドスコピーにより記述されると予想されていた。

研究代表者は齋藤裕氏と共同で $SL(n)$ と $SL(n)$ の内部形式について S -群とエンドスコピーを使った精密化された形のラングランス予想を研究しており、この研究を進展させてより一般の簡約代数群の局所ラングランス予想について研究を行うことを考えた。

一方で局所ラングランス対応により、パラメータと簡約代数群の既約表現との間の対応が得られるのであるが、それらの不変量との関係については未知の部分が多い状況であった。

これに対して、研究代表者は市野篤史氏・池田保氏との共同研究でパラメータの不変量を使って既約離散系列表現の形式次数を表す予想を得ており、この方向でも研究を進展させることを考えた。

2. 研究の目的

研究開始以前には S -群やエンドスコピーを使ってパケットの内部構造を記述する精密化された局所ラングランス予想は $U(3)$, $SL(n)$ とその内部形式といったいくつかの簡約代数群に対してしか示されていなかった。その為、本研究の研究目的としてより一般の簡約代数群、特に S -群がより複雑になるような古典群に対する精密化された局所ラングランス予想について研究し、パケットの内部構造についての知見を得ることを目的とした。

また、局所ラングランス予想によりパラメータと簡約代数群の既約表現との間の対応が得られるのであるが、研究代表者は市野篤史氏・池田保氏との共同研究でパラメータの不変量である L -因子・イプシロン-因子を使って離散系列表現の形式次数を表す予想を得ていた。簡約代数群の既約表現には他にも不変量があり、本研究においても他の不変量とパラメータの不変量との関係を調べることを研究目的のひとつとした。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者は既約表現の原点近傍での振る舞いとエンドスコピー的持ち上げとの関係について研究を行い、連携研究者の市野篤史氏と共同で、 $GL(n)$ の掬じれたエンドス

コピー的持ち上げの原点近傍での振る舞いについての結果を得た。これにより $GL(n)$, $SL(n)$ に対する Kottwitz-Shelstad 予想を証明した。

(2) 従来の局所ラングランス予想やエンドスコピーは簡約代数群に対して定式化されていて、その被覆群は予想の範疇にはなかった。

しかし、Adams, Renard, Trehan, Li 等の研究により被覆群にもエンドスコピーやパケットの類似と考えられるものが存在することが分かってきた。

また、本研究課題の研究を行う中でも、簡約代数群の被覆群に対してパケットと考えられるものが存在し、エンドスコピーとみなせる現象があることが分かってきた。

本研究課題の開始時点では古典群を主な研究対象として想定していたが、このように被覆群に対してもパケットやエンドスコピーの理論が展開できる可能性がでてきた為、本研究においても被覆群に対する研究を開始した。

この研究は池田保氏と共同で遂行し、 $SL(2)$ の被覆群のエンドスコピーについて研究を行い、有理数体上の保型形式に対して定義されていたコーネン・プラス空間とエンドスコピーとの関係を調べた。これにより、コーネン・プラス空間の概念を総実代数体の場合まで一般化した。

4. 研究成果

(1) 本研究課題の目標のひとつである局所ラングランス予想は、ガロア群の表現を一般化した A -パラメータと簡約代数群の既約表現との間に対応が存在することを予想している。このことから、パラメータの不変量と簡約代数群の表現の不変量との間にも関係が存在するのではないかと考えられる。

本研究に先立つ、研究代表者と市野篤史氏・池田保氏との共同研究においては簡約代数群の既約離散系列表現の形式次数をパラメータの不変量である L -因子、イプシロン-因子と S -群を使って記述する式を予想した。

簡約代数群の既約表現の重要な不変量として指標がある。この指標の原点近傍での振る舞いはベキ零軌道と関連しており、形式次数は単位元と関連した指標の振る舞いである。この観点からみると上記の形式次数に関する式は、指標の原点近傍での振る舞いとパラメータの不変量である L -因子、イプシロン-因子との間に関係がある事を示唆していると思われる。

一方で簡約代数群が半分裂しているときには指標の正則ベキ零軌道と関連した原点近傍の振る舞いはエンドスコピー的持ち上げのホイタッカー模型をつかった正規化の問題と関係している。これが Kottwitz-Shelstad の予想であり、これは正則ベキ零軌道と関連した指標の原点近傍での振る舞いとパラメータの不変量であるイ

プシロン-因子との間の関係を記述しているとみることができる。

研究代表者は簡約代数群の表現の不変量とパラメータの不変量の間関係のひとつとして、この予想の $GL(N)$ の掬じれたエンドスコピー的持ち上げの場合の研究を連携研究者の市野篤史氏と共同で行い、これにより Kottwitz-Shelstad の予想を $GL(N)$, $SL(N)$ に対して証明することができた。

パラメータの表現の不変量と簡約代数群の表現の不変量との間関係は数学的に深いものであると思われ、今後の研究を待つ部分が大いと考えられる。

この意味で、形式次数とは異なる部分の指標の挙動もエンドスコピー的持ち上げを考察するとイプシロン-因子と関係しているという本研究の結果は興味深いものであり、形式次数以外にも指標とパラメータの不変量が関係している可能性を示しているという点で意義があると考えられる。

(2) 本研究の目標であるラングランズ予想においては、表現のパケットについて明らかにすることが目的の一つであり、表現のパケットの構造を調べるにはエンドスコピーの研究が重要である。旧来のラングランズ予想は簡約代数群に対する予想であり、簡約代数群の被覆群はその範疇に含まれていなかった。

しかし、本研究において研究代表者は池田保氏との共同研究のなかで、いくつかの被覆群に対してもエンドスコピーとみなせる理論が存在しうることを示した。

この共同研究においては、 $SL(2)$ の 2 次の被覆群のエンドスコピーを考察し、 $SL(2)$ の 2 次の被覆群のエンドスコピー群として $PGL(2)$ があり、エンドスコピー群は同じでもエンドスコピー的持ち上げが異なるものとして $+$ と $-$ の 2 種類があることを見いだした。

エンドスコピー的持ち上げは軌道の間対応と移送因子によって定まる。この $+$ と $-$ の 2 種類のエンドスコピーにおいても軌道の間対応が異なっている。共同研究では $+$ と $-$ の両方に対して移送因子を定めることができた。

このことを使って、 $SL(2)$ の 2 次の被覆群に対してパケットと呼べるものが存在しており、その内部構造がこの 2 種類のエンドスコピーによって記述されることが示された。

これは、被覆群に対してもパケットやエンドスコピーの理論が存在することを示した点で意義があると考えられる。

また、簡約代数群 $SL(2)$ 自身のエンドスコピー群は $SL(2)$ とそのトラスであり、2 次の被覆群のときのような $PGL(2)$ ではない。また、簡約代数群 $SL(2)$ 自身のパケットの構造もその 2 次の被覆群とは大きく異なっている。

このことは、被覆群のパケットやエンドスコピーが簡約代数群のものとは異なっており、

単純に簡約代数群の場合の理論を拡張していけばよいわけではないことを示していると考えられる。

本研究の結果は簡約代数群の被覆群に対しても簡約代数群のときと同様にパケットやエンドスコピーの理論が精緻に存在していることを示しており、今後ラングランズ対応やエンドスコピーの理論が被覆群に対しても展開されていくであろう可能性を示している点で重要である。

また、被覆群のエンドスコピーやパケットが簡約代数群ものとは異なることを示した点で今後のこの分野の展開の基礎となる研究であると考えられる。

本研究課題においては以上の研究に基づき、コーネン・プラス空間についても池田保氏と共同研究を行っていった。

コーネン・プラス空間は偶数ウェイトのレベル 1 のモジュラー形式と対応する半整数ウェイトのモジュラー形式の空間であり、そのフーリエ係数によって特徴づけられている。またコーネン・プラス空間はある作用素の固有空間としても特徴づけられている。

この半整数ウェイトのモジュラー形式は有理数体上の $SL(2)$ の 2 次の被覆群の保型表現と対応するため、コーネン・プラス空間は上記の被覆群の研究と関連している。

本研究においてはコーネン・プラス空間を $SL(2)$ の 2 次の被覆群のエンドスコピーとの関係から調べ、剰余標数が 2 の素点でのエンドスコピーの理論を精密化した。

また、ホイタッカー関数の計算を素点が分岐している場合も含めて一般的に行い、これによりコーネン・プラス空間の概念を総実代数体の場合にまで一般化することができた。

ここで得られた総実代数体の場合のコーネン・プラス空間もフーリエ係数により特徴づけられると同時に作用素の固有空間としても特徴づけられている。

本研究によりコーネン・プラス空間をエンドスコピーと関係して理解することができたことはモジュラー形式の理論において意義のあるものである。

また、総実代数体の場合にコーネン・プラス空間が定義されたことは、今後の総実代数体のモジュラー形式の理論の発展に寄与していくものと考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Kaoru Hiraga, Hiroshi Saito, On L-packets for inner forms of SL_n , *Memoirs of the A.M.S.* 215 No.1013 (2012) 1-97. 査読有, DOI:10.1090/S0065-9266-2011-00642-8

Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino, On the Kottwitz-Shelstad normalization of

transfer factors for automorphic induction for GL_n , Nagoya Mathematical Journal Volume 208 (2012), 97-144. 査読有.

DOI: 10.1215/00277630-1815222

Kaoru Hiraga, Tamotsu Ikeda, On the Kohnen plus space for Hilbert modular forms of half-integral weight 1, Compositio Mathematica, 149 (2013), no. 12, 1963-2010. 査読有. DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X13007276>

〔学会発表〕(計 1 件)

Kaoru Hiraga, On endoscopy for covering groups of $SL(2)$, 2012 Conference on L-functions, 2012年8月23日, Shineville Resort, Jeju (Korea)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 平賀 郁

京都大学・大学院理学研究科(講師)

研究者番号: 10260605

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者 市野 篤史

京都大学・大学院理学研究科(准教授)

研究者番号: 40347480