科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２９日現在

機関番号：１５５０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2012
課題番号： 22540023

研究課題名（和文）　一般素数グラフによる群の構造の解明

研究課題名（英文）　Generalized prime graphs and the structure of finite groups.

研究代表者
飯寄　信保　(IIYORI NOBUO)
山口大学・教育学部・教授
研究者番号： 00241779

研究成果の概要（和文）：群論的性質Ｐに対し、有限群ＧのＰに付随する一般素数グラフは、P-部分群束から定義される代数系の不変量であることがわかっている。　本研究は群束の構造研究を一般素数グラフの視点から行った。P-部分群束のパス代数のある表現を考え、UD－代数と呼ぶ代数系を定義し、群の構造との関係について考察をし、一定の結果をえた。また、特殊な場合の UD-代数の構造については、完全に決定した。

研究成果の概要（英文）：Let P be a group property and let G be a finite group. *The generalized prime graph* Γ *of G associated with P*, or simply the *P-graph* of G, is a graph whose vertex set is π(G). Two vertices p,q of Γ are joined by an edge if and only if there exists a P-subgroup of G whose order is divisible by pq. There are deep relations between the structure of P-graphs and the one of P-subgroup lattices L(G,P) of G. In our research we study the structure of P-subgroup lattice (or group) from point of view of P-graphs. We define a new algebra UD(Q) for a quiver Q and we study UD(L(G,P)). We also find some relations between the structure of G and the one of UD(L(G,P)) and determine the structure of UD(Q) for some quiver Q completely.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目： 数学、代数学
キーワード：有限群、単純群、素数グラフ、クイヴァ

１．研究開始当初の背景
有限群Ｇの素数グラフとは、群の位数の素因数の集合を頂点集合とし、相異なる２頂点ｐ,ｑが辺で結ばれている必要十分条件を位数pqの元がＧにあることとして定義されるグラフである。素数グラフは、非常に強く群の性質を表していることがわかっている。素数グラフのアイディア自体は、古く

からあり、特に群の表現論・指標理論に活用され、Zassenhaus 群の分類に応用されている。Gruenberg-Kegel の研究と 1981 年の J. Williams による素数グラフの連結成分に関する論文により有限群構造解明に用いられる糸口が見出され、現代的な素数グラフ理論の考察が始まった。更に、有限単純群の分類が完成後、Kodratev，Iiyori-Yamaki によって単純群の素数グラフの連結成分の分類が完成し、いっそう素数グラフの応用が試みられるようになった。主な結果として、Iiyori-Yamaki による Frobenius 予想の解決 (1991), Du, Iiyori による Hall 予想の精密化、Liebeck らの Ore 予想の検証、数多くの研究者による群の element order による有限単純群の特徴づけ、また、involution に関する非常に一般的な結果である「Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order」(Chigira-Iiyori-Yamaki, Invention, 2000) など多数がある。また、Lucido による準単純群の素数グラフの分類等、素数グラフのより詳細な基礎研究も進んできた。一方、いろいろ場面で効率よく利用するために、一般素数グラフの概念が Abe-Iiyori (Hokkaido Math. J. 2000) によって示されている。そこでは、一般素数グラフの一例である可解グラフ（可解群の位数に注目して素数グラフと同様な手順で定義されるグラフ）の基礎理論が完成されており、その応用が示されている。この一般化の古典的群論の問題への応用として、研究代表者による p－可解群の特徴づけ (N. Iiyori, p-Solvability and a generalization of prime graph of finite groups. *Comm. Algebra.* 2002) 等があり、最近の J. Algebra においてこの理論の整備・応用が発表されており、より広い種類の問題にこの理論が応用されていた。

２．研究の目的

有限群及び、その周辺の問題を解決する場合、有限単純群の分類が有効に用いられている。有限単純群の分類を用いる場合、素数グラフの概念及び、連結成分の分類が有効に用いられている。この研究は、素数グラフの理論の局所部分群の視点から整備を進め、その成果をもとに素数グラフ及び一般素数グラフの応用を行うものである。応用の具体的課題として Quillen による一予想の考察等を考えている。

３．研究の方法

当初、単純群各々に対し素数グラフの理論の局所部分群の視点から考察する予定であった。予想できる重要なものとして

「G を有限群、ｐを G の位数を割る素数とし、A を G の基本ｐ可換部分群とする。$X=\{H<G \mid [H, A] \leqq H\}$ とおくとき、任意の X の元 H に対し $C_A(H) \neq 1$ を満たすならば、$C_G(H) \neq 1$ を満たす。」

を挙げていた。しかし考察上、有限単純群の局所的な構造等に困難な点が質・量的にあったため、一般的な解決に至ることが出来ず、古典群のいくつの場合にしか検証に至らなかった。そこで、上の予想において X を部分群束の部分束の問題と解釈し、研究手法を改善し、有限群 G の P-部分群束 L(P,G)をクイヴァと考えそのパス代数を考察し上の問題及び群の構造の解明を行うことに変更した。この方法は、先行する研究において L(P,G) をモノイドと捉えその半群環の部分環として一般バーンサイド環を定義し一般素数グラフの情報がこの環に遺伝することと整合性が付いている。このパス代数の表現を詳細に調べることにより、群の構造・一般素数グラフの構造の関係を明らかにする研究方法に変更し当初の目標解決を行うこととした。

４．研究成果

本研究の主たる結果は、
(1)任意のクイヴァに対し UD 代数と我々が名づけた代数を定義したこと（尚、群束から得られるものは、一般素数グラフと関係の深い一般バーンサイド環を自然な形でいる)、
(2)部分群束かあら得られる UD 代数と群の構造の関係について調べたこと、
(3)ある種の UD 代数の構造について決定したこと、
以上の 3 点にまとめることが出来ると思われる。結果(3)におけるある種の UD 代数とは、群指標から得られるクイヴァより得られるものであり、これは一般素数グラフ及び群の構造と深く結びついているものと考えられるもので本研究において非常に重要であるものと考えられる。以下(1)～(3)のそれぞれに分けて成果を報告する。

<u>(1)クイヴァの UD 代数の定義について</u>

三つ組み $Q=(Q_0, Q_1, s, r)$ を点集合 Q_0，矢集合 Q_1， s, r を Q_0 から Q_1 への写像であるようなクイヴァとする。Q に対し新しいクイヴァ $Q^{UD}=(Q_0^{UD}, Q_1^{U}, s^{UD}, r^{UD})$ を次のように定義する：

$Q_0^{UD}=Q_0$， ${}^tQ_1=\{{}^ta \mid a\in Q_1\}$， $Q_1^{UD}=Q_1\cup {}^tQ_1$,
s^{UD}， r^{UD}： $Q_0^{UD}\rightarrow Q_1^{UD}$ は $s^{UD}|_{Q0}=s$， $r^{UD}|_{Q0}=r$,
$s^{UD}({}^ta)={}^tr(a)$， $r^{UD}({}^ta)={}^ts(a)\ (a\in Q_1)$
を満たす。

このようにして得られた Q^{UD} のパス代数を R(Q)とおく（ここで、代数という用語は Z-代数の意味で使っている)。R(Q)は次のように自然に $Z[Q_0]$上に作用している：

$a(x)=w(a)\delta_{sUD(a),x}\ r^{UD}(a)\ \ (a\in Q_1^{UD}, x\in Q_0)$

上において w(a)は矢集合上の重み関数であり適当な条件のもとに任意に定めることが出来る。この自然な表現 $Z[Q_0]$の自己準同形環への R(Q)の像を UD(Q)とおき、これを Q の UD 代数と呼ぶ。

一般素数グラフへの応用を考える場合 Q として P-部分群束 L を含有関係についての poset とみなし、これから得られる自然なクィヴァを考えることになる。このとき矢は含有関係のある 2 つの部分群の対 (H,K) となるが、UD 代数を定める際の重み関数は H と K の指数で定義する。このようにして定義した UD 代数の (H,H) という形の矢の全体の生成する UD(Q)の部分代数の部分代数として自然な形で一般素数バーンサイド環が入っている。

また、G の部分群 H と K の剰余類の共通部分は空集合であるか H∩K による剰余類であるかどちらかであることより、Coset Geometry と呼ばれている群に関する幾何への応用の可能性も見出すことが出来た。

尚、この代数は、本研究中にはまとめるだけに留まった P-部分群束(より一般にクイヴァ）のホモロジー群との関連が深く、群の構造と一般素数グラフの関係について新たな結果をもたらしうる可能性があると思われる。

(2)UD 代数と群の構造

クイヴァ Q が連結なグラフで表現できるとき UD(Q)⊗**Q** (**Q** は有理数体) は Q_0 でインデックスされる行列環になることが直ちにわかる。よって、UD (Q) =$\Sigma n_{a,b}\,e_{a,b}$($e_{a,b}$はあ行列単位)となる有理数 $n_{a,b}$が存在する。(1)説明した群の場合の UD 代数(以下 UD(G)で表すものとする)の $n_{a,b}$は正の整数となる。この整数 $n_{a,b}$については群の位数を割りきる等の基本的な事柄が成立している。特に次に挙げる性質は重要なものと思われる：

定理（飯寄―澤辺）次は同値である。
(a) $n_{a,b}=|G|$
(b) ab=G かつ a∩b=1

系　a,b がベキ零部分群かつ $n_{a,b}=|G|$であるならば G は可解群である。

（尚、系を導くためには、群の factorization に関する有名な定理を利用する必要がある。）

この定理は、UD 代数の構造を決定する際に有効に用いることが出来る。また、UD 代数を調べることで群の構造を調べることが出来ることを意味している。

(3)UD 代数の構造について

(2)で紹介した UD(G)の構造については、不明な点がかなりあり今後の研究で解明していくしなければならない。視点を広げ、一般素数グラフと群の構造を結びつける手段として群指標を用いるものが知られていることから、群指標に基づく UD 代数の構造について詳しく考察を行った。群 G について部分群の既約指標全体即ち

$$\cup_H\ \ \mathrm{Irr}(H)$$

を頂点集合、２点χ,θが H,K の既約指標で H>K のとき内積（χ,θ^H）≠０のとき（χ,θ）を矢とするようなクイヴァを考え、（χ,θ）の重みを内積（χ,θ^H）として得られる UD 代数 UD_C（G）を考察した。この定義より、この UD 代数には Bratteli 図形の結合行列なども自然に含んでいるものとなっていること、UD 代数 UD_C（G）の置換表現の生成する部分代数として UD(G)が入っていること、また、自明な指標たちが生成する部分代数は、UD(G)とは異なるものの G の部分群束から自然に得られる代数であること等から自然かつ重要な考察対称と思われる。

この UD_C（G）についても(2)で報告した

UD_C（G）＝$\Sigma n_{a,b}\ e_{a,b}$($n_{a,b}$は正の整数)

という分解が成立する。この $n_{a,b}$について次が成立することを証明した。

定理（飯寄―澤辺）
$n_{a,b}$＝１

当初の予想は、上の結果と全く違うものであったが、いくつかの実例を考察し、Brauer の既約指標の特徴付けの理論から考察を行った結果上のような結果を得ることが出来た。

今回は論文投稿には至らなかったが、(2)で説明した結果を得る過程で有限群 G の剰余類全体 C に含有関係で矢を定義してできるクイヴァから(2)で扱ったクイヴァへ（それぞれ単体的複体として見たとき）単体写像が自然に定義できることが観察できた（aH　→H^aによっる)。このことより Coset 幾何等との関係を見出すことができた。これらを含め現在論文発表に向けて準備中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計２件）

① 「A theorem of monomials over groups and the classification of finite groups」 The 28th Symposium on Algebraic combinatorics
2011年6月20日から6月22日　大分大学（大分市）

② 「Prime graphs and subgroup lattices of finite groups」「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数組合せ論の研究」RIMS研究集会　平成２５年１月７日から１０日（木）京都大学数理解析研究所（京都市）

６．研究組織

(1)研究代表者

飯寄　信保　（IIYORI NOBUO）
山口大学・教育学部・教授
研究者番号：００２４１７７９

(2)研究分担者

（　　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　　）

研究者番号：