

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：18001
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：22540026
研究課題名(和文)ダイアグラム代数の総合研究

研究課題名(英文)On diagram algebras

研究代表者

小須田 雅 (Kosuda, Masasi)

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号：40291554

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：当初予定していたq-walled Brauer代数の圏論化は非常に複雑である一方で、応用対象が限定されることがわかってきたため、研究の方針を変更し、Khovanov の Diagram algebra, Motzkin algebra の圏論化を試みることにした。Khovanov 代数については未だ成果は得られていないが、Motzkin algebra については定義関係式を得ることに成功した。Khovanov 代数はトポロジーと代数を繋ぐ道具として有力な候補であり、今後も研究の対象となるであろう。

研究成果の概要(英文)：This research was intended to "Categorify" the q-walled Brauer algebra. We found that although this algebra is very complicated, the application of it would be very limited. So we have changed the research object slightly and began to study Khovanov's diagram algebra and Motzkin algebra. We have not yet succeeded the "Categorification" of Khovanov's algebra. However we have succeeded to define the defining relation of the Motzkin algebra. Khovanov algebra will become an important tool which binds topological objects and algebraic objects.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ダイアグラム代数 Murphy元 Motzkin代数 Khovanov代数 cell表現

1. 研究開始当初の背景

1996年に Graham-Lehrerにより、結合代数の Cell 構造という概念が構築され、数々の結合代数が Cell 構造を持つことが明らかにされた。ある結合代数が Cell 構造を持つことが明らかになった場合、そこから Cell 代数の一般論より、その代数の Gram 行列式を計算することが可能となり、半単純になるための条件、半正規表現の構成、Murphy 元の構成などが、いくつかの条件を加味することで原理的に可能となることが明らかになった。

2. 研究の目的

このような背景の下で、本研究は、巡回 BMW 代数を始めとして、これまで研究してきた幾つかの Diagram 代数が Cell 構造を持つことを示し、上記の一般論を当てはめることにより、各結合代数について Gram 行列式の計算や半正規形式による既約表現の構成、Murphy 元の決定などを通じて、Diagram 代数が Cell 代数になるための条件を求め、さらには Diagram 代数の圏論化による量子群との関係を明らかにし、新しい結び目やグラフの不変量の構成を目的としていた。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するために、平成 22年度に Diagram 代数の国内外の関連する研究者を集めた合宿型研究会を行い、Diagram 代数に関する情報交換を行うことからはじめた。(本研究費の支給が遅れたため、この研究会自体は、別の研究費を使って行われたが、研究会の成果をまとめた資料や DVD などの作成には本研究費を使用した。)

この研究会には Catharina Stroppel 氏を招待する予定であった。氏の都合で招待することが出来なかったが、2012年の名古屋大学における組合せ論の研究集会 FPSAC2012

で彼女が招聘されることが決まったため、そこでこの研究集会の成果や Diagram 代数に関する彼女の研究結果についての情報交換を行った。

2011年には琉球結び目セミナーにおいて、講演を行い、低次元トポロジーの研究者との情報交換を行った。

2012年は Diagram 代数の 1つである Motzkin 代数について研究を行った。この代数に関しては Georgia Benkart 氏と Tom Halverson氏によって、既に Cell 代数の一つであることが明らかになっていたが、半正規形式による既約表現は求まっていなかった。そこで、そのために必要となる定義関係式を解明する研究に従事し、2013年にフランスでの研究集会 FPSAC2013において Tom Halverson氏にその成果について報告をした。

4. 研究成果

当初、Diagram 代数の研究の中心として巡回 BMW 代数を念頭におき、その構造を明らかにすることで、Diagram 代数一般についての理論を導き出そうとしていたが、これは研究を始めてすぐに困難であること、および、Diagram 代数の例として取り上げるには、あまり適当でないということに気がついた。その理由は、具体例を計算しようとする、すぐに次元が大きくなってしまい、コンピュータを用いてもすぐに計算不可能となってしまうこと、また、他の分野との繋がりがあまり見えてこないということである。

そこで、当初の計画とは少し離れるが、他の Diagram 代数、Party 代数や Motzkin 代数、Khovanov 代数について研究を行うことにした。これらについては、まだ進行中であるが、研究期間中の成果について以下に記す。

(1) Party 代数に関する研究成果

Party 代数はこの研究以前から行っていた研究である。パラメーター r が十分に大きい場合が最も易しい場合で、この場合について 2000 年に定義関係式を明らかにし、2006 年に既約表現を求めた。パラメーター r が小さい場合の既約表現についての予想を 2006 年に発表し、その証明のための第 1 歩として定義関係式について決定し、2008 年に発表した。2006 年の予想についてはまだ証明がつけられていなかったため本研究期間内においても、引き続きそれに取り組んだ。結果、膨大な場合分けが必要となり、現在、すべての検証が終わったが、執筆に時間がかかっている。執筆しながらも検算を重ねているので、発表出来るのは半年後になる予定である。

Party 代数については Murphy 元の計算プログラムを岡山大学の成瀬弘氏が 2007 年に GAP にて作成したものを Maple で書き直し、実験を行なった。これについての成果も Experimental Mathematics への投稿を目指して論文をまとめている最中である。その他、Party 代数が cell 構造を持つことなども明らかになっているが、これについては研究集会や紀要等では発表しているが、論文にまとめるにはやや弱い内容なので、他の成果（後述する Khovanov 代数の研究など）と合わせて発表したいと思う。

(2) Motzkin 代数に関する研究成果

Motzkin 代数は Georgia Benkart 氏と Tom Halverson 氏によって主に半単純な場合について、包括的な研究がなされているが、定義関係式についてはオープンプロブレムであった。本研究期間中にこのオープンプロブレムに取り組み、解決を得たが、執筆中に Kris Hatch, Megan Ly, Eliezer Posner の 3 氏による共著論文が Arxiv に

投稿されてしまい、発表の機会を逃してしまった。3 氏の論文をチェックしたところ、ほぼ私の得た結果と同じであった。1 つの関係式は他の関係式から導かれることに気付いていない箇所があったが、その点については、論文の他の箇所を点検した上で、著者に伝える予定である。

(3) Khovanov 代数に関する研究成果

Khovanov 代数は以前から注目していたが、Topologist 向けに書かれた論文が多く、理解が困難であった。2012 年に名古屋で行なわれた FPSAC2012 において、招待講演者の一人 Catharina Stroppel 氏が、過去に私の研究していた walled Brauer algebra について講演を行なったので、私が修士論文で既に得ていた結果について知らせたところ、共著を含む彼女の論文の幾つかを紹介して頂いた。驚くことに、それらの一連の論文からは、Khovanov 代数と私が 20 年以上も前に研究していた walled Brauer algebra との関連を示唆するものが書かれていた。彼女の興味は半単純でない場合の表現であり、私の結果は半単純の場合のものばかりであり、直接的な貢献はまだないものの、一連の論文を詳しく検討して、Khovanov 代数と walled Brauer algebra の繋がり、特に q -変形した場合でなおかつ、半単純でない場合を調べると、HOMFLY-pt 多項式の圏論化が出来るのではないかと期待している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

① Party 代数の cell 構造：小須田雅
— (査読無、数理解析研究所講究録、

2013 年 6 月)

〔学会発表〕 (計 2 件)

- ① 小須田雅: Party代数の cell 構造 (ホップ代数と量子群、2012 年 9 月、京都)
- ② 小須田雅: タングルの不変量と表現 (琉球結び目セミナー、2011 年 9 月、沖縄)

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~kosuda/>

http://www.researchgate.net/profile/Masashi_Kosuda

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小須田 雅 (KOSUDA,Masashi)

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号: 40291554

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: