

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：18001
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540027
 研究課題名（和文） Koornwinder 多項式とその応用
 研究課題名（英文） Koornwinder polynomials and its applications

研究代表者

金子 譲一（KANEKO JYUICHI）
 琉球大学・理学部・教授
 研究者番号：10194911

研究成果の概要（和文）：本研究では、主に Baker-Forrester 定数項予想（この予想はある種の q -積分公式と同値であることが知られている）への応用を見込んだ Koornwinder 多項式の研究を行った。予想自身は未だに未解決であるが、予想とは異なった形の新しい q -積分公式が得られた。この積分公式から特に Dyson-Mehta 積分公式の一つの一般化が得られる。

研究成果の概要（英文）：We studied properties of Koornwinder polynomials mainly with the purpose of applying it to the Baker-Forrester's constant term conjecture, which is equivalent to a certain q -integration formula. Although the conjecture is still open, we have obtained a q -integration formula different from the conjectured one. This formula, in particular, implies a generalization of the Dyson-Mehta integral formula.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：Koornwinder 多項式、直交多項式、Baker-Forrester 定数項予想、Dyson-Mehta 積分公式

1. 研究開始当初の背景

Baker-Forrester 定数項予想とはある種の差積型の Laurent 多項式の定数項の具体的な積公式を与えるものであって、統計力学の計算に由来する（J. Combin. Theory Ser. A

81(1998), 69-87, Int. J. Mod. Phys. B 9(1995), 1243-1261).

この予想は、差積のべき積を含む q -Selberg 積分の拡張にあたる多重 q -積分の値の q -ガンマ関数による明示公式と同値であること、

及びいわゆる Morris 定数項公式の一つの一般化にもなっていることが知られている。この予想にはいくつかのアプローチの仕方があるが、研究代表者は Macdonald 補間多項式及び対称 Macdonald 多項式の内積公式を用いて予想の成立を特別な場合に示した (J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003), 349-367)。しかしこの方法で一般の場合の証明を得ることは今のところ困難である。

一方 Dunkl と Forrester は非対称 Macdonald 多項式の内積公式を用いる方法を提示し、実際後に Baratta により実行された (Kyushu J. Math. 64 (2010), 323-343)。

この方法によれば予想に含まれるパラメータのいくつかは 0 の場合に限るが、予想の証明ができてしまうのである。そこで、Macdonald 多項式をより一般の、パラメータをより多く含んだ (非対称) Koornwinder 多項式で置き換えて議論を進めたらどのような結論が得られるだろうかというのが出発点であった。Koornwinder 多項式は \tilde{C}_n 型の double affine Hecke 代数のいわゆる Cherednik 作用素の同時固有関数として定義されるものであるが、我々にとって重要なのは、これらがしかるべき内積に関する直交多項式系をなしてそのノルムの明示公式が既知であることである (cf. Stokman, J.V., Internat. Math. Res. Notices 2000, no.19, 1005-1042)。また適当なパラメータを 0 に極限をとると非対称 Macdonald 多項式が得られることも知られている。

2 . 研究の目的

まず第一に、Koornwinder 多項式の一部の変

数に関する交代化作用素に関する明示式、即ち Koornwinder 多項式に交代化作用素を作用させたものを二通りに書き下す公式を求める。作用させたものが一部分の変数に関する差積型の Laurent 多項式の具体的な表示を持つこと及び Koornwinder 多項式で展開したときの、元の Koornwinder 多項式の展開係数を求めることが目標である。これらはいわゆる Weyl の指標公式のアナロジーである。

次に Koornwinder 多項式の内積公式を用いて、適当な Koornwinder 多項式に一部分の変数に関する交代化作用素を作用させたもののノルムの式において、パラメーターと変数の適当なスケール極限をとることにより Baker-Forrester 定数項予想の証明を行う。

3 . 研究の方法

一部分の変数に関する交代化作用素は \tilde{C}_n 型の double affine Hecke 代数の Lusztig 作用素から容易に構成され、冪等かつ内積に関して自己共役である。そこで適当な Koornwinder 多項式の、一部分の変数に関する交代化作用素を作用させたもののノルムを、具体的に内積公式を用いて書き下す。上の研究の目的で述べたように、このノルムは一方では一部分の変数に関する差積型の Laurent 多項式のそれであり、他方では、交代化作用素が冪等かつ自己共役であることから元の Koornwinder 多項式のノルムと展開係数との積となる。

この、元の Koornwinder 多項式に関する展開係数を求めることが本研究の主要な点である。これは、展開係数達が満たすある種の漸化式を考察することから計算される。次に、Askey-Wilson 及び特に Koornwinder-Stokman

の計算（これらは対称Koornwinder多項式の適切なスケール極限がbigあるいはlittle- q Jacobi多項式となることを示したものである（cf. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1527-1579））を参照しつつ得られた式において適切なパラメーターと変数の適切なスケール極限をとることにより（内積を与える積分はスケール極限により、留数の無限和 = q -積分となる）、定数項予想と同値な q -積分公式を得る。

4. 研究成果

上記の方法を実際に行うことはできたが、出てきた q -積分公式は求めるものとは異なったものであった。今のところ何か異なった交代化作用素をとる、あるいは異なったスケール極限をとる等の工夫によって求めたい q -積分公式がでてくるかどうかは不明である。一方、この出てきた q -積分公式の q を1に極限をとった式から、ランダム行列理論におけるいわゆるDyson-Mehta積分公式（cf. Mehta, M.L., Random matrices, Third edition, Academic Press, 2004）の一つの一般化が得られることがわかった。Dyson-Mehta積分公式は、差積の絶対値の冪積を多変数Gauss測度で全空間積分したものがガンマ関数の積で与えられるという公式であるが、我々の一般化とはこの被積分関数に更に一部分の変数に関する差積の平方をかけたものの同様の積分も、やはりガンマ関数の積で与えられるというものである。このDyson-Mehta積分公式は、Macdonaldによって一般の有限Coxeter群に対応した場合にまで拡張した公式が予想され（SIAM J. Math.

Anal. 13 (1982), 988-1007）、その後Opdam等によって証明されたが、我々の一般化が有限Coxeter群に対応した場合まであるいは少なくとも古典型の場合まで拡張できるかどうかは今後の課題である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計2件)

1. Jyoichi Kaneko, A remark on Forrester's constant term conjecture, Zetas and Limit Laws in Okinawa 2011, 2011年11月27日,

フェストーネ, 宜野湾市

2. Jyoichi Kaneko, On the Baker-Forrester's constant term conjecture, Zetas and Limit Laws in Okinawa 2010, 2010年11月8日,

沖縄コンベンションセンター, 宜野湾市

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日：

国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 譲一 (Kaneko Jyoichi)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10194911

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

伊藤 雅彦 (Itou Masahiko)

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：30348461