様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 23 日現在

機関番号：２４４０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００２９
研究課題名（和文）　保型形式の周期と保型エル函数の特殊値

研究課題名（英文）　Periods of automorphic forms and special values

研究代表者
古澤　昌秋（FURUSAWA MASAAKI）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50294525

研究成果の概要（和文）：Boecherer 予想とは、次数２のジーゲル尖点形式のスピノル L 函数の函数等式の中心における特殊値に関する予想である。本研究は、この予想及びその一般化の相対跡公式による証明を目的としている。研究期間中に、基本補題のヘッケ環全体への拡張を証明し、論文を出版した。その応用として、第一の相対跡公式の版を証明し、その論文を学術雑誌に投稿した。

研究成果の概要（英文）：Boecherer's conjecture is about the central critical values of the degree four spinor L-functions associated to Siegel cusp forms of degree two. This research aims to prove the conjecture and its generalization by establishing certain relative trace formulas. We proved the extension to the entire Hecke algebra of the fundamental lemmas and published its proof. As an application, we also proved a simple version of the first relative trace formula　and submitted the paper containing its proof to a journal.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１２年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論、保型形式、保型表現、周期、特殊値、跡公式

１．研究開始当初の背景

現代の数論研究において、ゼータ函数の研究は、その中心的地位を占めている。特に、ゼータ函数の特殊値は、対応する数論的対象物の重要な情報を内包していると予想されている。Birch & Swinnerton-Dyer 予想、Bloch-加藤予想といった予想を想起すれば、その重要性について納得して頂けるであろう。

Langlands 予想によれば、モチビックな L 函数は、保型 L 函数によって表されると考えられる。したがって、保型 L 函数の特殊値の研究は、数論的に重要であると思われる。その重要性については、これまでに行われてきた楕円モジュラー形式に付随した保型L函数の特殊値の研究によって、十分に示されていると言って良いであろう。

しかし、楕円モジュラー形式、すなわちGL(2)以外の代数群に付随した保型形式の L 函数に関しては、これまでに特殊値が研究された例は、それほど多くなく、その研究はまだ端緒についたばかりである。
楕円モジュラー形式から歩みをさらに進めるのには、いくつかの方向が考えられる。次数２のジーゲル保型形式は妥当な方向性の一つである。また，GL(2)に関するJacquet-Langlands 対応を考えると、楕円モジュラー形式の理論は、3 次元定符号 2 次空間の特殊直交群上の保型形式の理論と深く関係する。この視点からすると、より次元の高い定符号の特殊直交群の保型形式へ、という方向性も興味深く思われる。
本研究は、以上のような状況を背景に開始されたものである。

２．研究の目的

（１）次数２のジーゲル尖点形式のスピノルＬ函数の関数等式の中心における特殊値に関して、1980 年代の後半に、Boecherer は興味深い予想を提出した。それは、スピノル L 函数を虚 2 次体に対応する 2 次指標でひねった L 函数の中心特殊値が、その 2 次体のイデアル類群の各元に対応するフーリエ係数の和の絶対値の 2 乗に比例する、というものであった。これは、多くの応用を生み出した、楕円モジュラー形式に関する Waldspurger の定理を、次数２のジーゲル保型形式の場合に一般化した主張とみなすことができる。
研究代表者は、1990 年代の後半から、Joseph A. Shalika (Johns Hopkins University)との共同研究として、この予想及びその一般化をJacquetの創始した相対跡公式を用いて証明することに挑んできた。その後、2000 年代中頃より、Kimball Martin (University of Oklahoma)も共同研究に加わった。
本研究の一つの目的は、これまで進めてきた相対跡公式の研究をさらに推進して行くことであった。

（２）また、上記の研究と同時に、森本和輝（大阪市立大学大学院理学研究科大学院学生）と共同で、定符号特殊直交群と GL(2)のテンソルＬ函数の特殊値の代数性の研究を行った。
こちらの研究の目的は、保型 L 函数の特殊値の代数性の示せる例を増やすことと、特に直交群が SO(4) である場合に GL(2) の Rankin triple L 函数の、unbalanced よばれる場合の特殊値の代数性を示すことであった。

３．研究の方法

（１）Boecherer の予想に関連して、Shalika との共同研究で、第一，第二の２つの相対跡公式を提唱し、ヘッケ環の単位元に関する基本補題を既に証明していた。また, Erez Lapid の示唆に基づき、Martin との共同研究で、第三の相対跡公式を定式化し、単位元に関する基本補題を既に証明していた。
相対跡公式を確立するにあたっては、次の段階として、基本補題をヘッケ環全体に拡張することが、標準的である。
しかし、ヘッケ環の一般の元に対して、軌道積分を計算することは著しく困難であり、その困難を回避する方法を探すことが必要であった。Ye、 Mao-Rallis、 Offen 等の先行研究を参考にして、Macdonald 多項式の理論を用いて、フーリエ反転公式を活用することが、有効であることがわかった。より具体的には、Macdonald 多項式の理論を用いて、ヘッケ環の良い基底を取れば、その基底の各元に対しては、軌道積分が単位元に関する退化した軌道積分たちの明示的な係数による 1 次結合で表されることが解った。そこで、方法としては、比較すべき両辺の軌道積分を、各辺に関する良い基底の元に関して、上記の方法で各々明示的に計算し、最終的には、2 つの基底の間の関係式を明示的に計算したのち、両辺の軌道積分を比較する、という方法をとることにした。

（２）定符号特殊直交群と GL(2)のテンソル L 函数に関しては、IV 型エルミート対称領域上の Eisenstein 級数の Bessel 周期を使う、という方法を用いた。この周期に関しては、Ginzburg、Piatetski-Shapiro and Rallis によって、不分岐素点上の局所ゼータ積分が、より一般の場合に既に計算されていた。したがって、実素点の上の局所積分を計算することと、Eisenstein 級数の代数性を維持しながら、分岐素点上の局所ゼータ積分を制御することが問題であった。
これに関しては、Harris による arithmetic automorphic vector bundle の理論が大変有効であった。

４．研究成果

（１）相対跡公式に関しては、第一と第三の相対跡公式に関する基本補題を、上記の方法でヘッケ環全体に拡張することができた。計算は全体として、brute force に依存するものであり、決して理想的と言えるものではなかったが、とにかく、これで研究を次の段階に進めることができるようになった。論文は、Memoirs of the American Mathematical

Society に掲載が決定し､電子版はすでに Web 上でダウンロードできるようになっている。
　基本補題の次の段階としては、smooth matching を考察するのが順当であり、その研究を開始したが、その完成にはまだ至っていない。しかし、その過程において、第一の相対跡公式の simple 版を証明することができた。Simple 版とは、いくつかの素点に関する仮定を置くことによって、解析的な困難を回避するものである。したがって、汎用性はあまりないが、これまで積み重ねてきた、相対跡公式によるアプローチが正当なものであることは示せたのではないかと考えている。これについては、既に論文は完成し、学術雑誌に投稿済みである。

（２）特殊直交群と GL(2)のテンソル L 函数に関しては、直交群の保型表現の無限素点における表現が自明な表現で、GL(2)の保型表現に対応する楕円モジュラー形式の重さが十分大きい場合について、最も大きい臨界点における特殊値の代数性を示すことができた。特に､直交群が SO(4)の場合には､GL(2)の Rankin triple L 函数で unbalanced な場合に、Blasius が明示化した Deligne の予想を、中心以外の点において検証した例を提供することができた。
　これに関しては、直交群の実素点での表現を任意の有限次元表現の場合へ拡張することと、右端以外の臨界点での特殊値の代数性に拡張することが重要と思われる。これについては現在、森本との共同研究として進行中である。

（３）相対跡公式に関する結果については、京都大学数理解析研究所における研究集会において研究発表し、国内及び集会に参加していた国外の研究者たちから、参考になる反響を頂けた。
　後者のテンソル L 函数の特殊値に関する結果については、国内だけでなく、2012 年７月にインドのプネで開催された、Pan Asian Number Theory Conference においても研究発表した。数論、特に、岩澤理論関連の研究者たちから関心を持たれた。Skinner-Urban による GL(2)の岩澤主予想の証明における、Klingen Eisenstein 級数のフーリエ係数の考察との関連からのようであった。そちらの方面に関しても、今後,鋭意に研究を発展させたいと考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Masaaki Furusawa and Kazuki Morimoto, Shalika periods on GU(2,2), Proceedings of the American Mathematical Society、 掲載決定
（査読有）

② Masaaki Furusawa, Kimball Martin and Joseph A. Shalika,
On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): the fundamental lemma. III,
Memoirs of the American Mathematical Society 225 no.1057, 2013, x+139 pp
DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0065-9266-2013-00675-2
（査読有）

③ 古澤昌秋、
ある L 函数の特殊値について：森本和輝との共同研究、
数理解析研究所講究録 1826「保型形式と保型的 L 函数の研究」所収、2013、pp.51-52
（査読無）

④ 古澤昌秋、
ある相対跡公式の基本補題のヘッケ環への拡張について(KIMBALL MARTIN, JOSEPH A. SHALIKA との共同研究)、
数理解析研究所講究録 1767「保型形式と関連する跡公式，ゼータ関数の研究」所収、2011、pp.25-28
（査読無）

⑤ Masaaki Furusawa and Kimball Martin,
On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): the fundamental lemma. II,
American Journal of Mathematics 133, 2011, pp.197-233
（査読有）

⑥ 古澤昌秋、
GSp(4)のスピノル L 函数の中心での特殊値に関係する新しい相対跡公式について、
数理解析研究所講究録 1715「保型形式・保型表現およびそれに伴う L 函数と周期の研究」所収、2010、pp.116-120
（査読無）

〔学会発表〕（計７件）

① 古澤昌秋、
On a certain simple relative trace formula for GSp(4)、

RIMS 研究集会「保型表現とその周辺」、
2013 年 1 月 25 日、
京都大学数理解析研究所

② 古澤昌秋、
On special values of certain L-functions、
Pan Asian Number Theory Conference、
2012 年 7 月 26 日、
IISER Pune、 India

③ 古澤昌秋、
On special values of certain L-functions (joint work with K. Morimoto)、
RIMS 研究集会「保型形式と保型的 L 函数の研究」、
2012 年 1 月 17 日、
京都大学数理解析研究所

④ 古澤昌秋、
GSp(4)のある simple relative trace formula について (Kimball Martin との共同研究)、
数理学談話会、
2011 年 12 月 14 日、
金沢大学理工学域数物科学類数学コース

⑤ 古澤昌秋、
ある保型 L 函数の特殊値について、
整数論セミナー、
2011 年 10 月 3 日、
東北大学大学院理学研究科数学専攻

⑥ 古澤昌秋、
ある相対跡公式の基本補題のヘッケ環への拡張について、
談話会、
2011 年 2 月 2 日、
琉球大学

⑦ 古澤昌秋、
ある相対跡公式の基本補題のヘッケ環への拡張について、
RIMS 研究集会「保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研究」、
2011 年 1 月 17 日、
京都大学数理解析研究所

６．研究組織

(1)研究代表者
古澤　昌秋（FURUSAWA MASAAKI）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50294525

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
兼田　正治（KANEDA MASAHARU）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60204575

谷崎　俊之（TANISAKI TOSHIYUKI）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70142916