様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５　月　１３　日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：22540035

研究課題名（和文）　モジュライ空間上の形式的ＫＺ方程式と多重ゼータ値

研究課題名（英文）　Formal KZ equation on moduli spaces and multiple polylogarithms

研究代表者
上野　喜三雄　（UENO　KIMIO）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70160190

研究成果の概要（和文）：論文 ”KZ equation on the moduli space M_{0,5} and the harmonic product of multiple polylogarithms” が Proc. London Math. Soc. に発表された．この論文では，2 変数 KZ 方程式を解析するための代数的枠組み（被約バー代数）と幾何学的枠組み（モジュライ空間のファイバー構造）を構築し，それに基づいて基本解の分解定理を確立した．さらに，分解定理が「一般化された調和積関係式」と同等であり，それが 1 変数多重対数関数の調和積を含むことも示した．論文 “The Inversion Formula of Polylogarithms and the Riemann-Hilbert Problem” も出版された．この論文では，Riemann-Hilbert 問題を使って，Polylogarithm が（ある漸近条件の下で）一般化された反転公式により特徴づけられることを示した．

研究成果の概要（英文）：The paper entitled by ”KZ equation on the moduli space M_{0,5} and the harmonic product of multiple polylogarithms” appeared in Proc. London. Math. Soc..
In this article, we established the algebraic foundation such as the reduced bar algebra, and the geometric foundation such as the fiber space structure of the moduli space M_{0,5}, and showed the decomposition theorem of the fundamental solution of the KZ equation on M_{0.5}. Moreover we showed that the decomposition theorem is equivalent to the generalized harmonic product relations, and that they involve all the harmonic products of multiple polylogarithms of one variable. The paper entitled by “The Inversion Formula of Polylogarithms abd the Riemann-Hilbert Problem” also was published last year. In this paper, we succeeded in characterzing polylogarithms by using the Riemann-Hilbert problem under a certain asymptotic condition.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：自然科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：KZ 方程式，モジュライ空間，多重対数関数，多重ゼータ値，リーマン：ヒルベルト問題

１．研究開始当初の背景

多重対数関数とその境界値である多重ゼータ値を統一的に扱うために，モジュライ空間 $M_{0,4}$ と $M_{0,5}$ 上の形式的 KZ 方程式の基本解の接続問題を考察することを考えた．

２．研究の目的

モジュライ空間 $M_{0,4}$ と $M_{0,5}$ 上で定義される形式的 KZ 方程式の基本解を詳細に考察して，基本解の接続問題を解くことが目的である．
また，接続問題の逆問題であるところのリーマン・ヒルベルト問題を考察し，多変数の多重対数関数，あるいは，より一般的な超対数関数を多重ゼータ値のデータから再構築することも目的の一部であると考えている．

３．研究の方法

①モジュライ空間 $M_{0,n}$ 上で定義される形式的 KZ 方程式

$$dG = \sum \Omega_{ij}\, d\log(x_i - x_j)$$

は，通常の KZ 方程式の普遍化である．より正確に言うならば，それは，冪零な係数をもつ通常の KZ 方程式の副冪零版（pro-nilpotent version）として定義される．
②しかし，この方程式は，その特異因子の形状から，そのままの形では解析が難しいので，モジュライ空間の斉次座標の非調和非（cross ration）を使って「立方体座標」なる局所座標を導入する．この座標の下で方程式を表現したものを(n-3)変数の KZ 方程式と呼ぶことにする．我々が扱うのは，$M_{0,4}$ と $M_{0,5}$ の場合の KZ 方程式であるから，1 変数の KZ 方程式と 2 変数の KZ 方程式ということになる．
③立方体座標の利点は，方程式のもともとの特異因子（方程式がそこで定義されない）が，原点においてブロー・アップされて，原点における特異因子の形状が正規交叉となり，局所解析がやりやすくなるのである．これはすべての $M_{0,n}$ について成立している．
そこで，立方体座標に合わせて，KZ 方程式を表現したものが(n-3)変数の KZ 方程式なのである．
④次に方程式の係数の作るリー環 X（これはモジュライ空間の基本群

$$\pi_1(M_{0,n})$$

の中心降下列から定義される．Ω_{ij} はそのリー環の生成元であり，**無限小純組み紐関係式**をみたしている）とその普遍展開環 U(X)，および，1 形式

$$d\log(x_i - x_j)$$

たちから生成されるシャッフル代数を導入する（これらの 1 形式はアーノルド関係式をみたしている）．

シャッフル代数の要素はそのままでは，$n>4$ に対しては，反復積分を定義しえない．そこで，Chen の積分可能条件をみたす要素だけからなるシャッフル代数の部分代数を取り出す．これが**被約バー代数** B である．
n =5 のとき（n=4 では良く知られた事実である）つぎの定理を示した．

定理１　U と B は互いに他の双対 Hopf 代数である．

この定理のおかげで，基本解の構成や解の変換理論（transformation theory）を構築することが出来るのである．
⑤　我々の研究において特徴的なことがもう一つある．それはモジュライ空間 $M_{0,n}$ は $M_{0,n-1}$ 上の局所自明なファイバー空間の構造

$$p : M_{0,n} \to M_{0,n-1}$$

を持つことである．これを n=5 の場合にみると，二つのファイバー空間構造

$$p_2 : M_{0,5} \to M_{0,4},\ (z_1, z_2) \to z_1$$

$$p_4 : M_{0,5} \to M_{0,4},\ (z_1, z_2) \to z_2$$

を得る．ここで，(z_1,z_2) は $M_{0,5}$ の立方体座標である．また，$M_{0,4}$ は P^1 から $\{0,1,\infty\}$ を除いた空間に同相であることに注意する．P^1 は複素リーマン球面である．また，上のファイバー空間におけるファイバーは P^1 から 4 点 $\{0,1,\infty,\ (z_j)^{-1}\}$ を除いて得られる空間に同相である．
このファイバー空間構造から，基本群が底空間の基本群とファイバーの基本群の半直積に分解することがわかる．さらに，リー環に移り，その普遍展開環 U(X)に移れば，その分解が二通り得られることになる．

定理２　$U(X)=U_{21}\times U_{22}$
$\qquad\qquad =U_{41}\times U_{42}$

ここで，×はテンソル積の意味であり，U_{kl} は U(X)の部分代数であり，ある自由リー環の普遍展開環になっている（後述）．

双対 Hopf 代数である B も定理２に応じて分解する．

定理３　シャッフル代数としてのつぎの同型が存在する．

$$\iota_2 : B \equiv S_{21}\times S_{22}$$
$$\iota_4 : B \equiv S_{41}\times S_{42}$$

ここで，S_{kl} は，ある 1 形式から生成さ

れる自由シャッフル代数である（後述）.

これらの定理を応用して，M_{0,5}上の KZ 方程式の局所的表現であるところの 2 変数 KZ 方程式の基本解の存在と一意性，および，その分解定理を示し，それの持つ意味を明にしていく.

４．研究成果

①2 変数 KZ 方程式は次のような形を取る：

dG=(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_{11}X_{11} +
+ x_{22}X_{22}+x_{12}X_{12})G

ここで,
x_j=dz_j/z_j, x_{jj}=dz_j/1-z_j
(j=1,2), x_{12}=d(z_1z_2)/1-z_1z_2
である.【3 研究方法】の定理２，３との関連でいうと，U_{21}は X_2, X_{22}, X_{12} で生成される自由リー環の普遍展開環，U_{22}は, X_1, X_{11}で生成される自由リー環である. また, S_{21}は, 1 形式 x_2,x_{22}, x_{12}^2=z_1dz_2/1-z_1z_2 で生成される自由シャッフル代数，S_{22}は x_1,x_{11}で生成される自由シャッフル代数である.

定理４ 2 変数 KZ 方程式は，原点 (z_1,z_2)=(0,0)において次の漸近展開をもつ解をただ一つ持つ：

L(z_1,z_2)=¥^{L}(z_1,z_2)×
×z_1^{X_1}z_2^{X_2}

ただし，¥^{L}(z_1,z_2)は原点の近傍で正則であり, ¥^{L}(0,0)=I である. I は U(X)の単位元を表す. さらに，L(z_1,z_2) および ¥^{L}(z_1,z_2)は U(X)の完備化における群的な要素（grouplike element）である.

L(z_1,z_2) を**原点で正規化された基本解**と呼ぶことにしよう.

さて, 普遍展開環 U(X)は定理２のように分解するが，これに応じて，基本解 L(z_1,z_2) も分解することが証明できる.

定理５　L(z_1,z_2) は次のように分解する：

L(z_1,z_2) = L_2(z_1,z_2)L_2(z_1)
=L_4(z_1,z_2)L_4(z_2)

ここで，L_2(z_1)は z_1 を変数とする 1 変数 KZ 方程式

dG=(x_1 X_1 + x_{11}X_{11})G

の原点で正規化された基本解，L_4(z_2)は z_2 を変数とする 1 変数 KZ 方程式

dG = (x_2 X_2 + x_{22}X_{22})G

の原点で正規化された基本解である．また，L_2(z_1,z_2)は z_2 を主変数，z_1 を助変数とする一般化された KZ 方程式

dG = (x_2 X_2+x_{22}X_{22}+
+x_{12}^2 X_{12}) G

の原点 z_2=0 で正規化された基本解，L_4(z_1,z_2)は z_1 を主変数，z_2 を助変数とする一般化されたＫＺ方程式の原点 z_1=0 で正規化された基本解である.

この基本解の分解定理は，つぎのようにある関数関係式系を意味する：まず, L_2(z_1) は 1 変数多重対数関数 multiple polylogarithms）の母関数である．また，L_2(z_1,z_2)は z_2 を主変数とし，z_1 を助変数とする超対数関数である（したがって，2 変数の関数）．これらはいずれもモジュライ空間 M_{0,5} 上の関数である．L_4(z_2), L_4(z_1,z_2) も同様である．したがって，定理５の分解はこれら M_{0,5}上の関数の２次の関係式の系を与えている．この関係式の系のことを**一般化された調和式関係式**と呼ぶことにしよう.

B^0 を, x_1, x_2 で終わらない語で張られる B の部分代数とする．B^0 も B と同じように分解する.

定理６　シャッフル代数としてのつぎの同型が存在する.

ι_2：B^0 ≡S^0_{21} × S^0_{22}
ι_4：B^0 ≡S^0_{41} × S^0_{42}

ここで，S^0_{22}は x_1 で終わらない語で張られる部分代数のことである．他の S^0_{jk} も同様に定義される.

この同型にしたがって，B^0 の要素 φ に対して，積分

∫_{p_2}ι_2(φ),　∫_{p_4}ι_4(φ)

をそれぞれのファイバー空間構造の底空間方向の積分とファイバー方向の積分に分解したものとして定義する.

定理７　一般化された調和積関係式はつぎの関係式の系を同値である.

∫_{p_2}ι_2(φ) = ∫_{p_4}ι_4(φ)

ただし，φ は B^0 のすべての要素を亘る.

さて，この関係式を一般化された調和積関係式と呼ぶ理由であるが，それは，
定理８　一般化された調和積関係式は，１変数多重対数関数の**調和積**をすべて含む.

からである．１変数多重対数関数の調和積を書き下すことは難しいので，ここでは polylogarithm の場合について述べることにしよう.

$$Li_k(z)= \Sigma z^n/n^k$$

がポリログである．この級数表示より，容易に，

$$Li_k(z)Li_l(w)=Li_{kl}(z,w) + Li_{lk}(w,z)+ Li_{k+l}(zw)$$

を導ける，これが調和積である.

以上の定理群が今回の基盤研究で得た成果の一部であり，下記に揚げた論文”KZ equation on the moduli space M_{0,5} and the harmonic product of multiple polylogarithms”の内容である．その扱う範囲は，あくまでも M_{0,5} 上の KZ 方程式の局所理論である．モジュライ空間 M_{0,5} の実点 M_{0,5}(R)は１２個の五角形を連結成分とすることが知られているが，この五角形の各頂点に立方体座標を付随させることができる．つまり，局所理論が各頂点ごとにあるのである．これをつなぎ合わせれば，基本解の大域的接続問題を解くことが出来る．これについては，現在論文を準備中である.

さらに，**Riemann-Hilbert 問題**についても言及しておく．Riemann-Hilbert 問題とは，一言でいうと，接続問題に対する**逆問題**である．現在までのところ，M_{0,4} 上の KZ 方程式に対しては，Riemann-Hilbert 問題を解くことが出来る．それについては下記の論文②で部分的な結果を出版している．M_{0,5} 上の KZ 方程式に対して Riemann-Hilbert 問題を解くことが，平成２５年度から始まった基盤研究『モジュライ空間上の KZ 方程式と Riemann-Hilbert 問題』の目標である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① Shu Oi and <u>Kimio Ueno</u>; TheInversion Formula of Polylogarithms and the Rieman-Hilbert Problem, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 40 (2013),491-496.
査読あり

② Shu Oi and <u>Kimio Ueno</u>;KZ equation on the moduli space M_{0,5} and the harmonic product of multiple polylogarithms, Proc.London Math. Acad.(3) 105 (2012),983-1020.
査読あり

〔学会発表〕（計２件）
① <u>大井周</u>－上野喜三雄；1 変数 KZ 方程式の接続問題と Riemann-Hilbert 問題，
日本数学会年会，2013 年 3 月 23 日，
京都大学吉田キャンパス

② 大井周－<u>上野喜三雄</u>；2 重対数関数の 6 角形関係式と Riemann-Hilbert 問題，
日本数学会年会，2013 年 3 月 23 日，
京都大学吉田キャンパス

６．研究組織
(1)研究代表者
上野喜三雄（UENO KIMIO）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70160190

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし