

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 24 日現在

機関番号：32661

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540037

研究課題名(和文)高次元連分数アルゴリズムの研究

研究課題名(英文)Multidimensional continued fraction algorithm

研究代表者

安富 真一 (YASUTOMI, Shin-ichi)

東邦大学・理学部・教授

研究者番号：60230231

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：研究を始める以前よりさらに良い性質を有した高次元連分数アルゴリズムのクラスを提案することができた。数値的な実験によりこのアルゴリズムは6次体の数体までLagrangeの連分数の周期性の定理の拡張が期待できることおよび4次以下の代数体の単数の生成に有効であるとの経験的な結果を得た。また2次元stepped surface上のsubstitutionと関連する基礎的な結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We were able to suggest a new class of multidimensional continued fraction algorithms, which improve our algorithms that we have studied. The numerical experiments support the extension of classical results of the Lagrange theorem for the number field of degree less than 7 and the generation of fundamental units in number fields of degree less than 5. We have fundamental results about the relation between the class of algorithms and substitutions on two dimensional stepped surfaces.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：連分数 単数 高次元連分数

1. 研究開始当初の背景

高次元連分数展開アルゴリズムいろいろな立場から高次元化を試みられてきた。例えば Jacobi に始まる単純な 1 次分数変換を用いたもの、Klein に始まる数の幾何を用いたもの、LLL を用いた最良有理近似を目指すもの、などのアプローチがある。しかしながら連分数が 2 次体で果たしたような性質をすべて兼ね備えた規範的なアプローチはまだ存在しない。すなわち周期的であることが代数的な条件として決定されていることと代数体の単数が生成されること、最良の有理近似を与えることの 3 つが拡張されているアルゴリズムは存在しないように思われる。我々は最近高次元連分数展開アルゴリズムを新たな見地から提案した。今までの計算機実験により、既知の高次元連分数展開アルゴリズムより格段に良い性質を持つことが分かってきた。特に周期的であることが代数的に決定される可能性が高いと思われる。また代数体の単数の生成に対しても期待できることが実験から分かってきた。このアルゴリズムを用いて、未だ完成していない高次元連分数展開理論を構築していきたいというのが当初の目標である。

2. 研究の目的

我々が提案したアルゴリズムを用いて高次元連分数展開理論を拓きたい。具体的に 6 つの目標を想定している。1) 高次体で周期性の計算機実験を進め、アルゴリズムの有効性を検証する。2) アルゴリズムに関する力学系に関して natural extension の具体的な構成を行う。3) 同時有理近似アルゴリズムとしての程度有効であるかを計算機実験と理論面で探っていく。4) 代数体の単数の生成にどの程度有効であるかを計算機実験と理論面で探っていく。5) substitution (自由モノイド上の endomorphism を無限語に拡張したもの) の不動点、Rauzy フラクタル、atomic surface、平面の stepped surface 期タイリング等との関連を探る。6) 関数体や P 進体などへの高次元連分数の拡大を探る。

3. 研究の方法

計算機による数値実験を次の目的で行った。1) より高次の体で周期現象が期待できるようにアルゴリズムの調整を行った。アルゴリズムには中核的な量によって次の行き先が決定されるようになっていく。もっとも適切な量を計算機実験によって探った。この結果最良とは言えないが好い成績を示す量を発見することができた。2) 周期点からなる既約集合を決定することが周期性の証明では重要である。既約集合がどのような形状であるかを計算機による数値実験で探った。それは 3 次体の場合 6 次元のユークリッド空間内の図形になる。低次元への射影を可視化することでその形を観察した。研究の課程で 6 次元の図形を探求することは難しいこ

とが分かってきたのでアルゴリズムを簡素化することで 4 次元の図形を観察することにした。結論的にはその図形は大変複雑な形状をしていて解析を全うすることができなかった。それらはフラクタル関係の数学で見られる図形を彷彿させるものであった。3) 我々のアルゴリズムによって代数体の単数が生成可能かをその定式化を含め計算機実験を行った。すなわちアルゴリズムの自然な量がどのように単数群と関係があるかを計算機実験で探った。2 次体については連分数と単数の関係がよく知られているが我々の立場の連分数アルゴリズムと単数の関係の関係を明かにした。stepped surface の substitution との関係の研究はその分野の創始者である伊藤俊次氏および古門麻貴氏と連携を行い研究を進めた。また基本図形から substitution によって stepped surface が生成されるかどうかは連分数にとって重要な性質である。関数体と P 進体については類似のアルゴリズムの定式化が可能か探った。

4. 研究成果

著しい特徴のあるアルゴリズムのクラス (仮称: G-Farey アルゴリズム) の初期バージョンを構築することができた。当初の目標では我々が研究してきたアルゴリズムを掘り下げることが目的であったがよりよいアルゴリズムを提案できたのは最大の成果と考える。その後の研究によりこのアルゴリズムを複素数体まで含めた一般的な体 (円単数が $1, -1$ のみ) まで拡張できる可能性があることが計算機実験によ裏付けられた。その結果を受けてアルゴリズムのクラスの定式化を行った。このアルゴリズムは数値計算的には 6 次以下の数体に関する周期性が強く期待できる。一部のクラスの体については 10 次体の周期性まで期待できることが分かった。またこのアルゴリズムは数体の単数の生成アルゴリズムとして期待できることが数値計算的に裏付けることができた。その数の共役も同時に連分数展開することでその数体の単数を生成できる可能性があることが分かってきた。3 次体以上についてはその証明はできなかったが目標の定式化ができたことは前進であると思う。代数的整数論では共役も同時に考えることで整数論的に重要な結果を導いているが我々の定式化もそれに準じて自然である。純 3 次体に関しては Dedekind の基底から出発すると数値計算的には例外なく基本単数を生成した。判別式が負の 3 次体に関しては基底を様々に選ぶことにより基本単数の生成を観察した。総実 3 次体に関しては基底を様々に選ぶことによりおおそ実験した例の 99 パーセントで単数を生成することを観察した。4 次体でも生成の割合は低いと同様の事象を観察している。2 次体については連分数と単数との関係を我々のアルゴリズムで置き換えたもの

が成立することを示すことができた。stepped surface 上の substitution と我々のアルゴリズムとの関係に関する基本的な性質を示すことができた。Modified Jacobi-Perron アルゴリズムを利用した stepped surface の生成問題でその簡明な条件を導くことに成功した。また stepped surface 上の単数の分布に対する経験的な蓄積を得ることができた。また標数 0 の関数体に関しては周期概念を拡張することで Lagrange の定理が成立する可能性のある例で示すことができた。P 進体については田村がある多項式の根についてそれを P 進近似する P 進体上の高次元連分数を構築した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

(1) Jun-ichi Tamura, Shin-ichi Yasutomi; Some aspects of multidimensional continued fraction algorithms

, RIMS Kokyuroku Bessatsu 34, 463-475(2012), 査読有

(2) Jun-ichi Tamura; A p-adic phenomenon related to certain integer matrices, and p-adic values of a multidimensional continued fraction, RIMS Kokyuroku Bessatsu 29, 1-40(2012), 査読有

(3) Jun-ichi Tamura, Shin-ichi Yasutomi; "A NEW ALGORITHM OF CONTINUED FRACTIONS RELATED TO REAL ALGEBRAIC NUMBER FIELDS OF DEGREE 5" INTEGERS 11B. 1-21 (2011), <http://www.integers-ejcnt.org/vol11b.html>, 査読有

(4) Jun-ichi Tamura, Shin-ichi Yasutomi; "Algebraic Jacobi-Perron algorithm, for biquadratic numbers" AIP Conf. Proc., Amer. Inst. Phys 1264. 139-149 (2010), 査読有

[学会発表](計 17 件)

(主な発表)

(1) 安富 真一, 田村 純一; New classes of multidimensional continued fraction algorithms for algebraic number fields of higher degree and their applications, Diophantine Analysis and Related Fields 2014 年 03 月 06 日, 筑波大学(つくば市)

(2) 田村 純一; New classes of algorithms of multidimensional continued fraction and the generation of the group of units of algebraic number fields of higher degree, 研究集会「数論とエルゴード理論」2014 年 02 月 10 日, 金沢大学サテライトキャンパス(金沢)

(3) Jun-ichi Tamura; Multidimensional continued fraction algorithms and the group of units/quartic number fields, Sino-Japanese Workshop on Fractals and Dynamic Systems 2013 年 12 月 26 日, Morningside center of Mathematics(北京)

(4) 安富 真一, 田村 純一; 新しい高次元連分数アルゴリズムとその応用, 研究集会「代数的整数論とその周辺」2013 年 12 月 09 日, 京都大学数理解析研究所(京都)

(5) 田村 純一, 安富 真一; Algebraic units and multidimensional continued fraction algorithm for algebraic number fields of higher degree (1),(2), 日本応用数学会 2013 年度年会 2013 年 09 月 10 日, アクロス福岡(福岡)

(6) Jun-ichi Tamura; A new algorithm of continued fraction and the generation of stepped surface, subtile2013, 2013 年 01 月 13 日, CIRM(France)

(7) Shin-ichi Yasutomi; On the generation of a stepped surface by the modified Jacobi-Perron algorithm, subtile2013, 2013 年 01 月 13 日, CIRM(France)

(8) Shin-ichi Yasutomi; A new multidimensional slow continued fraction algorithm and its application, Numeration and substitution 2012, 2012 年 06 月 06 日, 数理解析研究所(京都)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/c/math/yasutomi/mfarey.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

安富 真一 (YASUTOMI, Shin-ichi)

東邦大学・理学部・教授

研究者番号：60230231

(2)研究分担者

田村 純一 (TAMURA, Jun-ichi)

津田塾大学・付置研究所・研究員

研究者番号：90418905

(3)連携研究者

()

研究者番号：