

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540039

研究課題名（和文） 代数幾何学における純非分離射の諸相

研究課題名（英文） Aspects of purely inseparable morphisms in algebraic geometry

研究代表者

原 伸生 (HARA NOBUO)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90298167

研究成果の概要（和文）：正標数の代数幾何に特有の現象であるフロベニウス射などの純非分離射に関連して、フロベニウス・サンドイッチ特異点と正標数の 2 次元特異点の F 爆発について研究し、以下の事項に関する知見を得た。(1) F 爆発が最小特異点解消でない 2 次元特異点のフロベニウス・サンドイッチを用いた構成；(2) 2 次元 F 正則特異点の F 爆発；(3) 非 F 正則有理 2 重点の F 爆発；(4) 単純楕円型特異点の F-爆発。(1), (3), (4)は、澤田宰一、安田健彦両氏との共同研究である。

研究成果の概要（英文）：We studied Frobenius sandwich singularities and F-blowups of 2-dimensional singularities, which are closely related to purely inseparable morphisms in algebraic geometry in positive characteristic. We obtained results on the following subjects: (1) Frobenius sandwich surface singularities whose F-blowup is not the minimal resolution; (2) F-blowups of F-regular surface singularities; (3) F-blowups of non-F-regular rational double points; (4) F-blowups of simple elliptic singularities. (1), (3) and (4) are due to joint works with Tadakazu Sawada and Takehiko Yasuda.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

### 1. 研究開始当初の背景

正標数の代数幾何における様々な病的現象は非分離的な射の存在と密接に関係している。その一方で、最も基本的な純非分離射であるフロベニウス射を通して定義される F 特異点などを積極的に用いた正標数の代数多様体の研究もなされてきた。正標数の代数

多様体  $X$  のフロベニウス射は、 $X$  から  $X$  自身への射であるため、多様体  $X$  を変えずに何回でも繰り返し合成できるが、一般の純非分離射  $f: X \rightarrow Y$  においては、 $X$  と  $Y$  の様々な性質が異なるため、これを調べることにより、フロベニウス射のみを研究することとは異なる研究の方向性が生じるものと期待される。これが、フロベニウス・サンドイッチ（以後

F サンドイッチと略記) 特異点を研究する背景となった。

F サンドイッチ特異点は、非特異多様体からの有限被覆をもつという意味において商特異点との共通点をもつ。従順な商特異点の研究においてはその G-ヒルベルト概形が重要な役割を果たすが、安田健彦氏により定義された F 爆発の概念は G-ヒルベルト概形の純非分離的な類似と考えられ、正標数固有の双有理変換として大変興味深い研究対象となってきた。

## 2. 研究の目的

本研究は、正標数における一般の有限純非分離射とそれに伴って現れる代数多様体を、F 特異点や大域的 F 正則性などフロベニウス射に関わる着想と方法を応用しつつ様々な角度から考察することを目的とする。上述した背景に鑑みて、とりわけ以下の各項目について見通しのよい定理または詳細な分類結果を得ることを目指す。

(1) 曲面の F サンドイッチ特異点：正標数の非特異曲面  $X$  上のベクトル場  $D$  に対し、 $X$  と同じ底空間上で  $Df=0$  なる正則関数  $f$  からなる構造層をもつ曲面  $Y$  を  $X$  の F サンドイッチとよぶ。これに関して

予想：  $Y$  の特異点が F 正則ならば、 $D$  は半単純ベクトル場、すなわち、 $Y$  はトーリック特異点である。  
を証明し、F 正則でない F サンドイッチ曲面特異点についても詳細な研究を行う。

(2) 大域的 F 正則な F サンドイッチ射影曲面射影多様体の大域的 F 正則性は対数的ファン多様体と密接に関係する重要な性質である。 $X$  として射影平面など特殊な大域的 F 正則曲面を与えたときに現れる大域的 F 正則な F サンドイッチ曲面  $Y$  の分類と特徴付けを試みる。とくに、 $X$  がトーリック曲面で  $Y$  が大域的 F 正則ならば  $Y$  もトーリック曲面であると予想されるので、この  $Y$  のトーリック幾何の言葉による分類も考察する。

(3) F サンドイッチ特異点と F 爆発：(1) の F サンドイッチ特異点  $Y$  への純非分離的な被覆  $X \rightarrow Y = X/D$  を従順な群  $G$  による作用による商写像  $X \rightarrow X/G$  に置き換えて考えたときに、後者における  $G$  ヒルベルト概形に対応するものとして現れるのが、安田健彦氏により定義された F 爆発と考えられる。上の純非分離的な状況と分離的な状況の類似を視野に入れつつ、F サンドイッチ特異点の F 爆発について考察する。

(4) 正規曲面特異点の F 爆発：研究開始当初は、(3) の F サンドイッチ特異点の F 爆発の記述が目標であったが、研究の進行と共に、一般の特異点、とくに曲面特異点の F 爆発の振舞いに興味の対象が移ってきた。そこで、曲面特異点のうち、とくに、対数的標準特異点 (F 正則、有理 2 重点、単純楕円型特異点など) の F 爆発について研究し、その構造を決定する。

## 3. 研究の方法

平成 22 年度は、(1) 曲面の F サンドイッチ特異点の F 正則性と、(2) 射影平面の大域的 F 正則な F サンドイッチ曲面の分類及び、(3) の特別な場合である、平面上の半単純ベクトル場  $D$  による商として現れる 2 次元トーリック F サンドイッチ特異点の「 $D$ -ヒルベルト概形」と F 爆発の具体的な記述に関する研究を、研究代表者の原が基本的な方針を提供し、詳細な計算については澤田幸一氏と協力して研究を進める。

平成 23、24 年度においては、平成 22 年度の研究経過・結果を受けて研究の方向性を随時見極め、さらに、研究目的欄で挙げた当初の研究項目(1)–(3)と共に、これらに関連した興味深い問題が新たに浮上した場合にはこれも視野に入れて研究を進めて行く。これに相当するのが研究項目(4)の正規曲面特異点の F 爆発である。これに関しては、曲面特異点が F 正則である場合は原が単独で、F 正則でない有理 2 重点と単純楕円型特異点に関する研究は、安田健彦氏、澤田幸一氏との共同で行う。

## 4. 研究成果

本研究の当初の問題意識は、F サンドイッチなど、正標数における一般の純非分離射の性質の解明であり、研究の前半における成果はこの方向に沿って得られたものであるが、後半においては F 爆発に興味の中心が移行し、主として曲面特異点の F 爆発に関する成果を得た。その概要は以下の通りである。

(1) F サンドイッチ特異点に関して、澤田幸一氏との共同研究で以下の知見を得た：

① 定理：F サンドイッチ特異点  $Y = X/D$  が F 正則ならば、 $D$  は半単純ベクトル場、すなわち、 $Y$  はトーリック特異点である。

これは、研究目的の項目(1)における予想に対する肯定的な解答を与えるものである。一方、特異点の F 正則性を仮定しない場合については次の例を構成した。

② 例(F 爆発が最小特異点解消でない F サンドイッチ特異点) :  $X=(X, o)$  を標数  $p>0$  の体上  $z^p=x^p y - xy^p$  で定義される正規曲面特異点とする. このとき任意の  $e>0$  に対して,  $X$  の最小特異点解消  $Y$  上の  $p+1$  本の特異有理曲線の鎖を  $A_{\{p-1\}}$ -特異点につぶす非同型双有理射  $Y \rightarrow FB_e(X)$  が存在する. とくに,  $X$  の  $e$  次 F 爆発  $FB_e(X)$  は最小特異点解消とは一致せず, かつ, 特異点をもつ.

(2) 大域的 F 正則な F サンドイッチ射影曲面に関して, とくに射影平面の大域的 F 正則な F サンドイッチ曲面について澤田幸一氏と共同で研究し, これらの F サンドイッチ曲面がトーリック曲面となることを示し, 対応する扇による分類を行った.

(3) 2次元 F 正則特異点の F 爆発に関して以下の定理を証明した.

①定理: 標数  $p>0$  の 2次元完備局所環  $R$  が F 正則であることと,  $R$  が  $R$  加群として有限生成な 2変数形式ベキ級数環の純部分環となることとは同値である.

②定理: 2次元 F 正則特異点の  $e$  次 F 爆発は,  $e$  が十分大きいとき最小特異点解消と一致する.

定理①から, 2次元 F 正則環  $R$  上の直既約な反射的加群の同型類が高々有限個であり,  $R$  の  $e$  次フロベニウス直像が, 十分大きい  $e$  について, すべての直既約な反射的加群を直和因子にもつことがしたがう. このことと 2次元 McKay 対応の正標数版を組み合わせるにより定理②が証明される.

(4) 正規曲面特異点の F 爆発に関して澤田氏, 安田健彦氏との共同研究で, 以下の結果を得た:

① F-正則でない有理 2重点の F-爆発: 標数 2, 3, 5 の曲面の有理 2重点においては, F-正則でない病的なものが存在する. これらのうち F-サンドイッチ特異点であるものを中心に幾つかの特異点について, F-爆発の構造を決定した. この計算においては, 安田氏による計算ソフトウェア Macaulay2 上のプログラムを利用している.

②単純楕円型特異点の F-爆発(I): 正標数の単純楕円型特異点について, 環の次数構造と例外楕円曲線の上のベクトル束の構造など

を用いて, その F 爆発を研究した. その結果, F 爆発が特異点をもつもの, とくに非正規であるものや, F-爆発列が単調でないもの(特異点が F 純でない場合), F-爆発列が無限列となる(=F 爆発列が安定化しない. 下記の項目(5)を参照)ものなど, 有理特異点の場合とは異なる振舞いを示す F-爆発の例を単純楕円型特異点において見出した.

(5) 単純楕円型特異点の F 爆発 (II): 上記(4)②の単純楕円型特異点の F 爆発について, 原がさらに単独で研究を進め, その構造を完全に決定した. その結果の一つとして次が証明された.

定理:  $X=(X, x)$  を標数  $p>0$  の単純楕円型特異点, その最小特異点解消上の例外楕円曲線を  $E$  とするとき, 次の三条件は同値である:

- (a) 任意の  $e>0$  に対し,  $X$  の  $e$  次 F 爆発  $FB_e(X)$  は最小特異点解消と一致する.
- (b)  $X$  の F 爆発列  $\{FB_e(X) \mid e=1, 2, 3, \dots\}$  は安定化する.
- (c) 交点数  $-(E, E)$  は標数のベキ  $p^0=1, p^1=p, p^2, p^3, \dots$  と等しくない.

安定化しない F 爆発の構造は, 特異点が F 純か否かによって異なる. また, 単純楕円型特異点の族の同時 F 爆発の構成について考察した.

(6) その他: 正標数の射影平面を  $n$  点で爆発させて得られる曲面の構造層の累次フロベニウス直像の構造を計算する方法を考案し, 実験的な計算を行った. 現時点で得られた非自明な結果として, 標数 2 における 4 点爆発の累次フロベニウス直像の構造を決定することができた. これは本研究課題終了後も進行中の研究である.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① N. Hara, T. Sawada and T. Yasuda, F-blowups of normal surface singularities, Algebra & Number Theory, 査読有, 印刷中(2013)
- ② N. Hara, F-blowups of F-regular surface Singularities, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 140 (2012), 2215-2226, <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-11074-8>
- ③ N. Hara and T. Sawada, Splitting of Frobenius sandwiches, pp. 121-141, in Higher dimensional Algebraic Geometry

(editors: S. Mukai and N. Nakayama),  
RIMS kokyuroku Bessatsu (ISSN: 1881-  
6193), 査読有, B24 (2011)

[学会発表] (計7件)

- ① 原伸生, フロベニウス直像と F 爆発に関する幾つかの問題, 杜の都代数幾何学研究集会, 2013年2月14日, 東北大学
- ② 原伸生, Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities, RIMS 研究集会「高次元双有理幾何の周辺」, 2012年6月12日, 京都大学
- ③ 原伸生, Aspects of F-regularity—old and new—, 代数学シンポジウム, 2011年8月9日, 岡山大学
- ④ N. Hara, F-blowups of normal surface Singularities, Workshop on Algebraic Geometry in Positive Characteristic, 2011年5月26日, KIAS, 韓国
- ⑤ 原伸生, F-blowups of F-regular surface singularities, 日本数学会年会, 2011年3月, 早稲田大学 (アブストラクト原稿のみ)
- ⑥ 原伸生, F-blowups of F-regular surface Singularities, 研究集会「ファノ多様体と正標数の話題を中心として」, 2011年2月11日, 九州大学
- ⑦ N. Hara, F-blowups of certain Frobenius sandwich singularities and rational double points, Fudan-Tohoku Joint Workshop on Algebraic Geometry, 2010年6月1日, 復旦大学, 中国

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

原 伸生 (HARA NOBUO)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90298167

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: