

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 7 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540041

研究課題名(和文) 周期積分とミラー対称性およびグロモフ・ウィッテン不変量の幾何学

研究課題名(英文) Period integrals, mirror symmetry, and the geometry of Gromov-Witten invariants

## 研究代表者

細野 忍 (Hosono, Shinobu)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60212198

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、理論物理学の研究から見つかった不思議な対称性で、世界の主要研究機関を中心に研究されている研究テーマです。本研究では、レイエ合同と呼ばれる古典射影幾何学の枠組みで"美しく"構成されるカラビ・ヤウ多様体にミラー対称なカラビ・ヤウ多様体(の族)を構成し、その族の振る舞いから、もとの多様体が、幾何学的に性質のよく似た別のカラビ・ヤウ多様体と対をなしていることを見つけました。さらにこの対は、古典的な射影双対と呼ばれる双対性に深く関わり、現代的には連接層の導来圏の同値性によって特徴付けられることを示しました。結果、射影双対とミラー対称性の新しい関係が見えてきました。

研究成果の概要(英文)：Mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds is a mysterious symmetry which has been found in the study of string theory in theoretical physics. Since its discovery, mirror symmetry has been studied in major institutes in the world. In this research, we have focused on Calabi-Yau manifolds which are called Reye congruence in the language of classical projective geometry. Finding a mirror Calabi-Yau manifold of Reye congruence Calabi-Yau manifold, and studying its deformation family, we have found that there appears another Calabi-Yau manifold which is paired with the Reye congruence. We have shown that this pair arises naturally from the projective duality. Furthermore, from a more modern viewpoint, we have shown that the two Calabi-Yau manifolds share an equivalent derived category of coherent sheaves. Interesting interplay between the projective duality and mirror symmetry has been appeared from this research.

研究分野：数理物理学・代数学

キーワード：カラビ・ヤウ多様体 ミラー対称性 導来圏 グロモフ・ウィッテン不変量 周期積分 射影幾何学

### 1. 研究開始当初の背景

カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、1990年代に、弦理論の研究から発見された不思議な対称性である。発見以来、カラビ・ヤウ多様体のモジュライ空間の幾何学、グロモフ・ウィッテン不変量など数々の数学の問題に関して新しい視点から研究の動機を与え、またその結果、数学に数多くの成果をもたらしていた。一方で、ミラー対称性の数学的な理解は、その定義を含めて、問題の難しさもあって未解決なままの状況である。難しさは、ミラー対称性が異なった2つのカラビ・ヤウ多様体のシンプレクティック幾何学と複素幾何学を入れ換えることに起因しているが、2つの幾何学をうまく取り入れる枠組みとして、導来圏を用いるアプローチと、トーリック退化とアフィン幾何学を用いるアプローチが提唱されている。2つのアプローチそれぞれから、2つのカラビ・ヤウ多様体がミラー対称であることの極めて一般的な記述法が提唱されている。

ミラー対称であることの一般的な記述とは別に、カラビ・ヤウ多様体を、トーリック多様体の中で考える完全交叉として与える時には、これにミラー対称なカラビ・ヤウ多様体が別のトーリック多様体の中の完全交叉であることが知られている。このようなカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性に関する諸性質は、周期積分の解析的な性質に反映して現れることが事例に基づく研究によって知られている。さらに、周期積分はBCOV正則アノマリー方程式と呼ばれる方程式を定め、カラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウィッテン不変量を定めることが知られているが、方程式の数学的構造の解明は未解決問題である。

### 2. 研究の目的

ミラー対称性の定義に深く関わる一般的な性質(圏論的なものと、アフィン幾何学に基づくもの)が、周期積分の解析的な性質に現れる様子を調べ、ミラー対称性が実現する背景にある数理構造の解明を行う。また同時に、カラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウィッテン不変量を定める正則アノマリー方程式の幾何学的な構造の解析を行う。

### 3. 研究の方法

トーリック多様体の完全交叉として与えるカラビ・ヤウ多様体、または、それに近い形で具体的に定義式を与えるカラビ・ヤウ多様体に焦点を絞り、1)ミラー対称なカラビ・ヤウ多様体の構成、2)ミラー多様体の周期積分のモノドロミー性質の決定、3)正則アノマリー方程式の解の構成、を行う。1)においては、トーリック退化とアフィン幾何学に基づくミラー多様体の一般的構成法との整合性に

焦点をあてた研究を実施する。2)においては、多変数超幾何級数に関する整基底予想を用いてモノドロミーの計算を行う。また、得られるモノドロミー性質を、ミラー対称な導来圏におけるフーリエ向井変換と対比することによって、圏論的なミラー対称性の定式化との整合性を調べる。3)では、カラビ・ヤウ多様体のモジュライ空間の幾何学の大域的な性質が、方程式の解の構成に関わる様子に着目して解析を進める。

### 4. 研究成果

トーリック多様体の中の完全交叉として構成されるカラビ・ヤウ多様体を手掛かりに研究を開始したところ、この様な多様体を出発点に有限群で商を取って得られるあるカラビ・ヤウ多様体が、研究方法1),2),3)のどの視点からもとても興味深い性質を示すことが見つかった。そこで、高木寛通氏(東京大学数理科学研究科)との共同研究を実施したところ、このカラビ・ヤウ多様体がReye 合同と呼ばれる古典射影幾何学で研究された枠組みにあてはまるものであることが判明した。Reye 合同は、曲面(エンリケス曲面)の射影幾何学で研究されたもので、その歴史は19世紀までさかのぼる。このような由緒ある幾何学が、3次元のカラビ・ヤウ多様体として、高次元多様体の研究に自然に現れることが明らかになり、Reye 合同に焦点を絞った研究を実施した。ファノ多様体の専門家である高木氏との共同研究を通して、以下のような結果を得ることが出来た。

(1) Reye 合同カラビ・ヤウ多様体は、トーリック多様体の完全交叉ではないため、有効なミラー多様体の構成法は知られていない。しかし、オービフォールド構成法と呼ばれる手法でミラー多様体(の族)を実際に構成し、その上、周期積分のモノドロミー性質を完全に決定した。(発表論文)

(2)(1)のオービフォールド(ミラー)構成法において、行列式型の5次超曲面で与えられる特異なカラビ・ヤウ多様体の族が現れる。この多様体の特異点の解消は、Barth-Nietoによって80年代に調べられたカラビ・ヤウ多様体ととてもよく似た性質を持つことを示した。また、特異点解消によって得られるカラビ・ヤウ多様体の変形族は2次元となるが、この2次元族の周期積分は多変数超幾何級数によって与えられる。数値解析による解析プログラムを作り上げることによって、周期積分のモノドロミー行列を決定することが出来た。また、結果として、多変数超幾何級数の整基底に関する予想を検証することが出来た。(発表論文)

(3)ミラー多様体の族の周期積分の解析から、Reye 合同カラビ・ヤウ多様体  $X$  に対して、も

う一つ、ホッジ数が等しいが位相が異なり、かつ双有理でない別のカラビ・ヤウ多様体  $Y$  が存在することが予想された。Reye 合同の射影幾何学を調べると、そこに射影双対の世界が自然に存在することが判明し、予想された  $Y$  がこの射影双対の世界に構成されることが示された。 $X$  は有限群の自由商によって得られるのに対して、 $Y$  は有限群を被覆群とする被覆として得られ、その被覆は double symmetroid と呼ばれ 2 次超曲面の古典的な射影幾何学と深く結びつくことが判明した。(発表論文)

(4)(3)で見つかった  $X$  と  $Y$  は、近年研究が進んでいる、homological projective duality と呼ばれる射影多様体の接続層の導来圏と古典的な射影双対の幾何学を結び付ける一般的な枠組みの一例であることが判明し、特に、 $X, Y$  の接続層の導来圏に関してそれらの導来同値性が予想された。 $X, Y$  に関連する射影双対の幾何学から、 $X$  にパラメータを持つ  $Y$  上の曲線のイデアル層が自然に現れることが見付き、このイデアル層をフーリエ向井変換の核に用いて、導来同値性の証明を与えることが出来た。(発表論文)

(5)正則アノマリー方程式の解を構成し、これより  $X, Y$  のグロモフ・ウィッテン不変量の決定を行った。得られた不変量を読み取ると、(4)で導来同値性を示すために用いるフーリエ向井変換の核( $X$  にパラメータを持つ  $Y$  上の曲線のイデアル層)が、 $Y$  の不変量に現れる様子が観察された。 $K3$  曲面上のベクトル束のモジュライ空間を考えると、これが再び(別の) $K3$  曲面となることがある。この有名な事象に対応して、3 次元カラビ・ヤウ多様体  $Y$  上のある曲線のイデアル層のモジュライ空間を考えると、これが別のカラビ・ヤウ多様体  $X$  になる例を与えていると解釈されることを指摘した。(発表論文)

当初の研究計画に沿って研究を開始したところ、Reye 合同カラビ・ヤウ多様体という、ミラー対称性の様々な様相を凝縮するような“よい”事例に遭遇した。このため、研究ではトーリック多様体の完全交叉またはそれに近いカラビ・ヤウ多様体を一般に扱うことを計画したが、Reye 合同に焦点を絞った研究を実施することとし、上記(1)~(4)の詳細な研究成果を得た。本研究と並行して、近年、ロシアの研究者らによって homological projective duality の研究が進んでおり、Reye 合同を起点として、さらに視野を広めた研究に発展することが期待される。また、理論物理学において gauged linear sigma model と呼ばれる理論形式があり、homological projective duality や幾何学商(GIT 商)とよく整合することが指摘されている。今後 Reye 合同で観察された事象が広く一般化されることが予想される。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

細野 忍, 高木寛通, Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalences, J. Diff. Geom., 査読有, accepted for publication.

細野 忍, Moduli spaces of Calabi-Yau complete intersections, Nuclear Phys. B, 査読有, accepted for publication.

細野 忍, 高木寛通, Mirror symmetry and projective geometry of Fourier-Mukai partners, to appear in “Handbook for Mirror Symmetries of Calabi-Yau and Fano Manifolds”, 査読無

細野 忍, Mirror symmetry of determinantal quintics, RIMS 講究録, 査読無, 1918 巻, 119 - 126.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1918.html>

細野 忍, 高木寛通, Determinantal quintics and mirror symmetry of Reye congruences, Commun. Math. Phys., 査読有, 329 巻, 2014, 1171 - 1218.  
DOI: 10.1007/s00220-014-1971-7

細野 忍, 高木寛通, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I, J. Alg. Geom., 査読有, 23 巻, 2014, 279 - 312,  
DOI: 10.1090/S1056-3911-2013-00618-9

細野 忍, BCOV ring and holomorphic anomaly equation, Adv. Studies in Pure Math., 査読有, 59 巻, 2010, 79 - 110.

[学会発表](計 15 件)

細野 忍, Mirror symmetry and geometry of double quintic symmetroids (招待講演), Seoul ICM 2014 Satellite Conference: Geometry and Physics of Gauged Linear Sigma Models and Its Related Topics, 2014, 7, 29 於: KIAS, Korea.

細野 忍, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences (招待講演), 60 years of Calabi conjecture--A Workshop in honor of Professor Shing-Tung Yau on the occasion of his 65th birthday, 2014,8,4 於: Tsinghua University, Beijing.

細野 忍, Mathematical aspects of two sphere partition functions (招待講演), Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2014,8,8, 於: 津田塾大学.

細野 忍, Mirror symmetry, Fourier-Mukai partners, and Moduli spaces of Calabi-Yau manifolds I,II (招待講演), Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds, 2014,12,9, 於: RIMS, 京都大学.

細野 忍, Mirror symmetry of determinantal quintics and Calabi-Yau manifolds of Reye congruences (招待講演), Calabi-Yau Geometry and Mirror Symmetry, 2014.1.5, 於: National Taiwan University, Taipei, Taiwan.

細野 忍, Mirror symmetry of determinantal quintics (招待講演), Workshop on Modular forms around string theory, 2013.9.20, 於: Fields Institute, Tronto, Canada.

細野 忍, BPS numbers and projective geometry of Reye congruences (招待講演), The Geometry of Topological D-Branes, Categories, and Applications, 2013.5.14, 於: The Erwin Schroedinger Institute, Vienna, Austria.

細野 忍, Fourier Mukai partners, mirror symmetry, and BPS numbers (招待講演),

Seminar weeks on Calabi-Yau manifolds, mirror symmetry, and derived categories, 2013.2.15, 於: University of Tokyo.

細野 忍, Calabi-Yau threefolds of Reye congruences (招待講演), The Mathematics Department Seminar, 2012.11.15, Brandeis University, USA.

細野 忍, Mirror symmetry of some determinantal quintics (招待講演), Mirror symmetry and related topics, 2012.8.23, 於: Kunming University of Science and Technology, China.

細野 忍, Differential Rings over the moduli spaces of Calabi-Yau manifolds (招待講演), Isomonodromic deformations and related topics, 2012.1.27, 於: 首都大学.

細野 忍, On the mirror family of Reye congruence Calabi-Yau 3folds (招待講演), Hodge Theory and String Duality, 2011.12.6, 於: BIRS, Canada.

細野 忍, On the mirror symmetry of Reye congruence Calabi-Yau 3folds (招待講演), Tokyo-Seoul conference 2011, 2011.12.3, 於: University of Tokyo.

細野 忍, Mirror Symmetry in higher genus (招待講演), 2011 TMS Summer School on Mirror Symmetry, 2011.6. 8,9 and 10, 於: National Taiwan University, Taiwan.

細野 忍, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences (招待講演), Number Theory and Physics at the Crossroads, 2011.5.10, 於: BIRS, Canada.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

細野 忍 (HOSONO, Shinobu)  
東京大学大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：60212198