様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月３日現在

機関番号：１２６０４
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４００４２
研究課題名（和文）三角圏の部分圏の性質と多元環の導来同値の研究

研究課題名（英文）Study of subcategories of triangulated categories and derived equivalences of algebras

研究代表者
宮地　淳一（MIYACHI JUN-ICHI）
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号：50209920

研究成果の概要（和文）：ホモロジー有界な非有界鎖複体のホモトピー圏と有界鎖複体のホモトピー圏によるその商圏を研究した。Iwanaga-Gorenstein 環 R 上の有限生成射影加群のホモトピー圏の場合には、その商圏には、recollements の三角形構造という部分圏の構造が存在することを示した。その応用として、２次上三角行列環 $T_2(R)$ 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏と三角圏同値になることを示すことができた。

研究成果の概要（英文）：We study the homotopy category of unbounded complexes with bounded homologies and its quotient category by the homotopy category of bounded complexes. In the case of the homotopy category of finitely generated projective modules over an Iwanaga-Gorenstein ring, we show the existence of a triangle of recollements in the above quotient category. As an application, we show that this quotient category is triangle equivalent to the stable module category of Cohen-Macaulay $T_2(R)$-modules.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１２年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学
キーワード：環論、導来圏

１．研究開始当初の背景

三角圏は、導来圏，導来関手を公理的に構成するために生み出され、可換ネーター環および代数幾何学の研究において、Serre-Grothendieck 双対定理を定式化する目的で Grothendieck と Verdier によって導入された概念である。それまでの可換ネーター環および代数幾何学の研究においては、Serre 双対、Riemann-Roch の定理などの種々のホモロジー代数的、K-理論的不変量を測ることによって発展し、位相幾何学の手法から局所コホモロジーの道具を得て、正則局所環、Gorenstein 環、Cohen-Macaulay 環上で双対加群を使って、加群に関しての局所双対定理が得られている。Grothendieck は可換環上の加群圏、スキーム上の層の圏の導来圏、三角圏と導来関手、∂関手の理論を導入し、ネータースキーム間の固有射に関しての

Serre-Grothendieck 双対定理を示し、局所コホモロジーとの関係を与えた。さらに、Neeman により代数的トポロジーから、Homotopy limit 等の概念が三角圏に導入され、三角圏のホモロジー関手が表現関手と同型となるという Brown representability theorem がコンパクト対象が生成する三角圏では成立することが示された。これにより種々の問題は非有界導来圏で扱うことができ、Serre-Grothendieck 双対定理が非有界導来圏上で簡単に示すことが出来るようになった。

Beilinson-Bernstein-Doligne は三角圏に、t-structure と recollement という概念を導入した。彼らは t-structure の概念を用い、導来同値を経てフラッグ多様体上の Perverse Sheaf の圏と Lie 代数のある種の表現の圏との圏同値を導き出している。柏原正樹氏のホロノミック D-加群の導来圏と構成的層の導来圏の導来同値から構成的層の成す圏が極大過剰決定系の成す圏と圏同値であるというリーマン・ヒルベルト対応もこの概念によって示されている。一方、位相空間の開部分集合とその補集合に分割したときのそれぞれの層の導来圏同士の関係か端を発した recollment は、Cline-Parshall-Scott が半単純 Lie 代数や、半単純代数群に応用を持つ highest weight category の概念や quasi-hereditary 代数の導来圏への概念の導入する際の主要な概念となっている。

また、非可換環における導来圏の研究に関して、傾斜鎖複体の概念が Rickard によって導入され、環の加群圏の導来同値を導きだすという導来圏での“ 森田の理論”が存在することを示した。この理論は、代数多様体上の連接層の導来圏での傾斜層、傾斜鎖複体の概念へと発展し、このような層を持つ代数多様体と有限次元多元環の導来同値があることがわかった。これはそれ以前に Beilinson によって射影空間上の連接層の導来圏が有限次元多元環上の有限生成加群の導来圏の間の三角圏同値や、Kapranov が示したグラスマン多様体、フラッグ多様体上の連接層と多元環の三角圏同値の統一的な説明を与えることとなった。

研究代表者は、非可換連接環上において余傾斜双加群および余傾斜双鎖複体が、加群圏の導来圏の双対を導くことを示し、非可換ネーター環上の余傾斜双加群および余傾斜双鎖複体の極小入射分解に直既約入射加群がすべて現われるという residual 性の類似が成り立つことを示した。さらに、余傾斜双鎖複体の存在することと、加群の導来圏どうしの間に双対が存在する事が同値であるという導来圏での“森田の双対理論”が存在することを示した。また、研究代表者はコンパクト生成三角圏がある種の条件を持つ場合に t-structure を構成することを示し、それを多元環の導来圏に応用することによって傾斜鎖複体を構成することに成功した。さらに、三角圏において stable t-structure の概念を導入し、それが三角圏の局所化、余局所化の概念と一致することを示し、多元環の導来圏における部分圏と導来圏局所化を構成する完全鎖複体の性質を研究した。さらに、対称多元環の非有界導来圏では冪等元による recollement が存在することを示し、小さいところでの傾斜鎖複体を考えることによって、元の対称多元環上での傾斜鎖複体を構成することに成功し、さらにこれによる導来同値が recollment の構造を保存することを示した。

Rickard は、自己入射多元環上の加群の有界導来圏を完全鎖複体で生成される部分圏による商圏が、加群の安定圏と三角同値であることを示し、Buchweitz は可換 Gorenstein 環上の有界導来圏を完全鎖複体で生成される部分圏による商圏が、Cohen-Macaulay 加群の安定圏と三角同値であることを示した。代数多様体上では、この商圏が０だけから成る圏であることと、非特異代数多様体であることは同値であることから、”特異点の三角圏”とも言われるもので、斎藤恭司氏を初めとする特異点の研究者達によって盛んに研究されている。Fomin と Zelevinsky によって導入された cluster algebra に関連して、近年三角圏の orbit 圏を取ることによって得られる 2-Calabi-Yau 圏となる cluster 圏や、cluster 傾斜部分圏というものがあり、代数幾何学，表現論の間で多くの研究がなされている。

２．研究の目的

これらの研究の過程で一連の三角圏、導来圏の構造を解明するには三角圏での部分圏とそこから構成される商圏の圏論的性質を調べることが非常に有効であることがわかってきた。代数多様体、ネーター環、非可換多元環のいずれの場合にも、その導来圏や加群，層から構成される安定圏の構造を三角圏での t-structure, stable t-structure, cluster 傾斜部分圏等と呼ばれる部分圏が重要な役割を演じているということである。

これらの三角圏の部分圏および商圏を研究するには、代数曲面、可換環、非可換多元環での層や加群の個々の性質の研究だけで

はなく、三角圏からの統一的な見通しとして微分次数圏の構造、性質、そこから得られる対称の性質、部分圏の研究が必要である。

そこで、我々は代数多様体と有限次元多元環上の導来圏の鎖複体が構成する部分圏の性質の解明、微分次数圏での部分圏の構成と性質の解明を研究目的とし、その見地からの多元環、ネーター環上のホモロジー代数的、導来圏上の不変量の記述をする。具体的には、

（１）可換ネーター環および代数多様体のホモロジー代数的、ホモトピー理論的な特徴づけと、導来圏上での部分圏の性質の解明。

（２）三角圏における部分圏の記述と微分次数圏での圏的性質の解明。

（３）非可換多元環において、導来圏の部分圏の構成と性質の解明、それによって導かれる導来同値でのホモロジー代数的、導来的不変量の解明を行う。

３．研究の方法

多元環、ネーター環の構造を三角圏および導来圏の立場から研究し、種々の射影的代数多様体、多元環上での導来同値を導く部分圏とそれによる商圏の性質の解明、ホモロジー代数的、導来的不変量を導き出す鎖複体とそれが構成する部分圏および商圏の性質の解明を主な研究目的とする。そのためにはつぎの３項目に関しての研究とその関連性を検討する。

（１）可換ネーター環および代数多様体のホモロジー代数的、ホモトピー理論的な特徴づけと、導来圏上での部分圏の性質の解明。

（２）三角圏における部分圏の記述と微分次数圏での圏的性質の解明。

（３）非可換多元環において、微分次数圏の性質から部分圏の構成と性質の解明、それによって導かれる導来同値でのホモロジー代数的、導来的不変量の解明を行う。

４．研究成果

これまで研究代表者は三角圏Dにおいて部分圏の組(U,V)に対して stable t-structure という概念を導入し、三角圏Dの部分圏U_1, U_2, … , U_nに対して(U_1, U_2), (U_2, U_3), …, (U_n, U_1)が stable t-structures となっている概念を新たに提示した。このときまず､D には n 個の recollement が存在することを示した。この性質からこの構造を“recollements の n 角形”と呼び、（１）部分圏U_{i-1} とU_{i+1} が全て三角圏同値なること、（２）この構造を保存する三角関手等の性質，特に圏同値になるにはnが奇数のときは１つの部分圏、n が偶数のときは部2つの部分圏に於いて三角圏同値を示せば、全体の三角圏同値が成り立つことを示した。この三角圏の部分圏の性質が、Serre functor S が存在する三角圏に置いては、Auslander,Reiten等が導入したfunctorially finite 部分圏 U が存在するときは(U,V), (V,SU)というstable t-structure が存在すること。さらには、代数幾何学のCalabi-Yau多様体の概念から発展した(m/n)-Calabi-Yau三角圏に於いて、functorially finite 部分圏が存在するときは、“recollements の 2n 角形”2n三角圏が存在することを示した。

特に、Iwanaga-Gorenstein 環 R 上の（有限生成）射影加群のつくる加法圏に対して、ホモロジー有界な非有界鎖複体のホモトピー圏の有界鎖複体のホモトピー圏による商圏には、recollements の三角形構造が存在することが分かった。また一方、２次上三角行列環 T_2(R) 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏にも recollements の三角形構造が存在することが分かった。それらの recollements の三角形構造を構成する部分圏同士の圏同値であることを示して、有限生成射影加群でつくるホモロジー有界な非有界鎖複体のホモトピー圏の有界鎖複体のホモトピー圏による商圏は２次上三角行列環 T_2(R)上のCohen-Macaulay加群の安定圏と圏同値になることを示すことができた。Kapranov はそれを一般の N＞１に対して、d^N=0 をみたす列、N鎖複体という概念を導入した。その後、Dubois-Violett はN鎖複体での一般化したコホモロジーに関しての諸結果を出している。今年度の本研究で、N鎖複体上のホモロジー代数を、ホモトピー圏、三角圏の立場から研究を行った。まず、アーベル圏A上のN鎖複体の圏C_N(A)は、写像錐が定義できて Frobenius 圏になっていることを示し、そのホモトピー圏K_N(A)が三角圏になっていること示した。そこで、一般化されたコホモロジーを保存する擬同型射を考えることによって商圏を考え導来圏D_N(A)が定義できることを示し、それが射影的鎖複体のホモトピー圏と三角圏同値であることを示した。さらに、従来の鎖複体の導来圏も含んだ、様々なNに対して導来関手を定義できることを示した。その上で、A が無限直和を持ち、射影的コンパクト対象によって生成されるときには、A 上の写像のN-1列を対象とする圏Mor_{N-1}(A)上の通常の導来圏 D(Mor_{N-1}(A))と三角圏同値にあることを示した。これを次数環R上の次数加群圏に適用し、次数R加群圏GrModRのN鎖複体の導来圏とMor_{N-1}(GrModR)の導来圏が三角圏同値であることを示した。

Seshadri constant とは、代数幾何学で深く研究されている不変量であるが、可換環論でも、イデアルの記号的冪のリース環の有限生成性やヒルベルトの第１４問題と深く関連している。ウェイト付きの射影平面上の有限

個の点の定義イデアルに対して、その記号的冪の regularity の漸近挙動を調べた。Cox 環の標準加群を、元の代数多様体の標準因子を用いて記述した。射影代数多様体上の Weil 因子で定義される Cox 環の有限生成性やシジジーなどの環論的性質は、現在、代数幾何学や可換環論などの多くの研究者の研究対象となっている。奇素数次元の Gorenstein 孤立商特異点は、多項式環への巡回群の作用による商であることを証明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① Kazuhiko Kurano, Gorenstein isolated quotient singularities of odd prime dimension are cyclic, Comm. in Algebra, 査読有 40 (2012) 3010-3020

② Jun-ichi Miyachi, Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules, Journal of K-Theory, 査読有, 8 (2011) 507-542.

③ Kazuhiko Kurano, The canonical module of a Cox ring, Kyoto Journal of Math., 査読有 51 (2011) 855-874

④ Kazuhiko Kurano, Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane, Kyoto Journal of Math., 査読有 51 (2011) 25-45

〔学会発表〕（計１件）
Osamu Iyama, Kiriko Kato, Jun-ichi Miyachi, Recollement of homotopy category and Cohen-Macaulay modules, XIV International Conference on Representations of Algebras and Workshop (ICRA XIV), National Olympics Memorial Youth Center, Tokyo, Japan, August 12, 2010

６．研究組織
(1)研究代表者
宮地　淳一 (MIYACHI JUN-ICHI)
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号：50209920

(2)研究分担者 （無し）

(3)連携研究者
蔵野　和彦 (KURANO KAZUHIKO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90205188