

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 14 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540052

研究課題名（和文）分岐被覆と開代数曲面のトポロジー

研究課題名（英文）Branched covers and topology of open algebraic surfaces

研究代表者

徳永浩雄（TOKUNAGA HIROO）

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：30211395

研究成果の概要（和文）：代数曲面のガロア分岐被覆，とりわけ，代数曲面の 2 次被覆について，数論の観点から研究を行い，その成果を開代数曲面のトポロジーの研究に応用した．具体的には底曲面上の既約曲線を 2 次被覆に引き戻した際の曲線の分解に関する法則，1 変数有理函数体上の楕円曲線の数論について考察し，ガロア分岐被覆の明示的構成問題への応用を研究した．その成果を用いて conic-line arrangement, conic arrangement の Zariski 対や Zariski N 組の例を構成した．

研究成果の概要（英文）：We studied Galois covers, in particular, double covers of algebraic surfaces from a view point of number theory, and applied our result to study topology of open algebraic surfaces. We studied splitting curves in double covers, number theory of elliptic curves over the rational function field of one variable and their application to explicit construction problem for Galois covers. Based on our results, we gave examples of Zariski pairs for conic-line arrangements and Zariski N-plets for conic arrangements.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：分解曲線，楕円曲面，Galois 被覆，楕円曲面の切断

## 1. 研究開始当初の背景

$\Sigma$  は非特異射影代数曲面， $B$  は  $\Sigma$  上の被約因子，さらに  $G$  は二面体群，4 次交代群，または 4 次対称群に同型な有限群とする．これまで研究代表者は  $B$  で分岐する  $\Sigma$  のガロア分岐被覆で，そのガロア群が  $G$  に同型となるものの明示的な構成に関する研究を行い，その結果を  $\Sigma$  から  $B$  を取り除いた補空間，または，ペア  $(\Sigma, B)$  のトポロジーの研究に応用してきた．本研究課題もこうした視点の上に行っている．

これまでの研究においてガロア群が位数  $2n$  の二面体群  $D_{2n}$  に同型なケースでは， $B$  もしくはその一部分にそって分岐する  $\Sigma$  の 2 次被覆の幾何学的性質が重要であることがわかってきた．

研究開始当初の段階では二面体被覆の研究をさらに進めるため，2 次被覆研究のこれまでとは異なる新たな視点による研究が望まれた．その 1 つが「2 次体の数論」の類似「2 次被覆の数論」を考察することであった．具体的な問題としては，有理素数  $p$  が，2

次体の整数環で生成するイデアル(p)の素イデアル分解の法則に関する幾何学的類似を研究することであった。その目的のため「分解曲線 (splitting curve)」の概念を導入し、その性質を調べる必要があった。

研究開始当初の背景はこの分解曲線に関して「相互法則」を定式化し、証明を与え、その結果を  $\Sigma$ -B や  $(\Sigma, B)$  のトポロジーの研究に応用することであった。

## 2. 研究の目的

1 で述べた背景のもと当初の研究目的は「ガロア分岐被覆の明示的構成とその応用に関して、新たな理論を展開すること」であり、具体的には次の3点を目的とした：

- (1) 非特異代数曲面  $\Sigma$  上の 2 次被覆に関する「2 次体の整数論」の類似的研究、すなわち  $\Sigma$  上の既約曲線  $D$  が  $\Sigma$  の 2 次被覆に関して分解するという概念を導入し、その分解法則に関する幾何学的視点からの研究。
- (2)  $D$  の分解法則を  $\Sigma$  のガロア被覆の明示的構成問題に応用し、分岐被覆研究の新たな方向付けを与えること。
- (3) (1), (2) の結果の Zariski pair 等の開代数曲面のトポロジーの研究への応用すること。

さらに研究課題を遂行してくうちに、2 次被覆がファイバー構造をもつとき、

- (4) 函数体上の曲線の有理点やアーベル・ヤコビ写像の性質を研究し、これを開代数曲面の研究に応用すること

が加った。上記 4 点が本研究課題の目的である。

## 3. 研究の方法

2 の目的で挙げた 4 点についてそれぞれ述べる。

- (1) 研究代表者が主として取り組み、連携研

究者の中村が主催する研究集会で講演し、研究集会のプロシーディングに論文を発表した。

- (2) 研究代表者および首都大学東京客員研究員の坂内真三が、「複数のガロア分岐被覆の存在・非存在」を同時に考える手法について定期的にセミナーを行うとともに、その成果を研究集会で発表した。さらに、その成果を論文としてまとめた。

- (3) 研究代表者と二名の研究協力者 Artal Bartolo, Cogolludo (ともに Zaragoza 大学 (スペイン)) が取り組んだ。Email などを用いた討論に加え、年に一回程度のペースで彼らを訪問した。さらに研究代表者、島田 (連携研究者) 等が主催し、連携研究者の岡も参加する研究集會に

上記二名のスペインの研究協力者を招聘し、討論を行った。

- (4) (2) と同じ研究組織で取り組み、その成果を研究集會等で発表した。

## 4. 研究成果

本研究課題では「楕円曲面の数論に関する考察を分岐被覆の研究に利用する」という視点が研究全般に渉る通奏低音となっている。楕円曲面の数論は数論的問題意識で扱われることが多いが、それを幾何学へ応用するという点が本課題の成果の特色となっている。こうした視点の研究は他にはない。

- (1) 2 次被覆と分解曲線の研究及びそのガロア被覆構成問題への応用に関する成果は以下の通りである。

- ① 2 次曲線に沿って分岐する 2 次被覆上の既約 4 次曲線から得られる splitting curve の研究を行い、その成果を Journal of Singularities から出版した (発表論文の③)。この研究では、有理楕円曲面の Mordell-Weil 群を利用した splitting curve に関する判定法 (ある種の相互法則) が大きな役割を果たした。この論文では、結果の一部として、二面体被覆を利用した Zariski pair の例も与えている。

- ② 上記の成果の精密化。2 次曲線に沿って分岐する 2 次被覆に関し splitting curve となる 4 次曲線の構成法を有理楕円曲面の特別な切断の存在に問題を還元することにより与えた。本結果では特別な切断の存在を証明する際に楕円曲面の生成ファイバー上の群構造を利用している。この曲線の構成法は本論文の特色となっており、以降の研究の基本的手法となっている。なお、論文は Kodai Mathematical Journal から出版された (発表論文の②)。

- ③ 2 次被覆と分解曲線の研究に関し、発表論文③で得た成果「楕円曲面の Mordell-Weil 群を利用した splitting curve の判定法」を種数の高いファイバー空間の場合に一般化した。この成果は Advanced Studies in Pure Mathematics にて発表した (発表論文の①)。

- ④ Zaragoza 大学の Artal Bartolo, Cogolludo とともに二面体被覆の塔 (無限個の二面体被覆の列) の分岐因子となりうる 6 次曲線の研究に取り組み、このような 6 次曲線の特徴付けを与えることに成功した。論文としてはまとめていないが、口頭発表は行っている (学会発表の⑫)。

- (2) 函数体上の楕円曲面の有理点やアーベル・ヤコビ写像の性質に関する研究とその開代数曲面のトポロジーへ応用。本研究成果のアプローチはこれまでの研究ではほとんど

とられていない。

- ① 楕円曲面の切断の与える曲線の性質を調べ、7次のconic-line arrangementのZariski pairの例を構成した。この成果は  
口頭発表(学会発表の①, ③, ⑤, ⑦)を行い、論文 Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers にまとめた
- ② 楕円曲面上のbi-sectionとそのAbel-Jacobi写像の像について考察を行い、conic arrangementのZariski N組の構成に成功した。平面曲線のトポロジーを区別する手段としてガロア分岐被覆を用いているが、従来と異なる点は複数のガロア分岐被覆を同時に考えるという点である。この成果は坂内真三との共同研究である。研究集会で口頭発表(学会発表の②, ④, ⑥)し、論文 On the Abel-Jacobi map for bisections of rational elliptic surfaces and Zariski N-plets for conic arrangements にまとめた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Hiro-o Tokunaga, A note on quadratic residue curves on rational ruled surfaces, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 63 (2012) 565-577, 査読有
- ② Hiro-o Tokunaga, Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations, *Kodai Mathematical Journal*, vol 35 (2012) 78-104, 査読有, DOI:10.2996/kmj/1333027255
- ③ Hiro-o Tokunaga, Geometry of irreducible plane quartics and their quadratic residue conics, *Journal of Singularities (electric)*, vol 2 (2010) 170-190, 査読有, <http://www.journalofsing.org/volume2/article11.html>, DOI: 10.5427/jsing.2010.2k

[学会発表] (計17件)

- ① 徳永浩雄, Geometry of sections of rational elliptic surfaces, 代数幾何学シンポジウム, 2012年10月23日, 豊岡市
- ② 徳永浩雄, Zariski N-plet for conic arrangements, Topology Seminar, 2012年10月5日, Universidad de

Zaragoza, Zaragoza (スペイン)

- ③ 徳永浩雄, Combinatorial type of plane curves and an elliptic surface over  $C(t)$ , Oberseminar komplexe Analysis, 2012年9月25日, Ruhr Universitaet Bochum, Bochum (ドイツ)
- ④ 徳永浩雄, 楕円曲面上の演算を利用した平面曲線の構成とその応用, 特異点と多様体の幾何学, 2012年8月27日, 山形大学
- ⑤ 徳永浩雄, 楕円曲面の群構造を利用した平面曲線の構成とその応用について, 代数幾何とその周辺, 2012年8月6日, 北海道大学
- ⑥ 徳永浩雄, Abel's theorem for bisections on rational elliptic surfaces and Zariski k-plet for conic arrangements, WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties, 2012年5月8日, Busan (韓国)
- ⑦ 徳永浩雄, Geometry of sections of elliptic surfaces and its application, Topology of singularities and Related Topics III, 2012年3月30日, University of Dalat, Dalat (ベトナム)
- ⑧ 徳永浩雄, Splitting curves for double covers and the topology of the complements of certain curves on rational ruled surfaces, DMV Jarestagung, 2011年9月19日, Universitaet zu Koeln, Koeln (ドイツ)
- ⑨ 徳永浩雄, Elliptic dihedral covers, Topology Seminar, 2011年9月15日, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (スペイン)
- ⑩ 徳永浩雄, On splitting curves with respect to certain double covers of rational ruled surfaces, 代数幾何学シンポジウム-佐渡-, 2011年6月5日, 佐渡開発総合センター
- ⑪ 徳永浩雄, On quadratic residue curves and their applications, Computational Aspects of Birational Geometry, 2011年3月29日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon (韓国)
- ⑫ 徳永浩雄, 楕円曲面のbi-sectionの幾何と6次曲線で分岐する二面体被覆の塔, 代数幾何小研究集会-宇部-, 2011年1月29日, 宇部工業高等専門学校
- ⑬ 徳永浩雄, Dihedral covers, Mordell-Weil groups and Zariski pairs, Algebraic Geometry Seminar, 2010年11月16日, Korean Institute for Advanced Studies, Seoul (韓国)
- ⑭ 徳永浩雄, Geometry of sections on

some rational elliptic surfaces,  
Algebraic Geometry Seminar, 2010年  
11月15日, Sogang University, Seoul  
(韓国)

- ⑮ 徳永浩雄, Splitting curves in double covers and elliptic surfaces, Galois-theoretic Arithmetic Geometry, 2010年10月20日, 国際高等研究所
- ⑯ 徳永浩雄, Some sections on rational elliptic surfaces and certain conic-quartic configurations, Topology Seminar, 2010年9月30日, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (スペイン)
- ⑰ 徳永浩雄, Conic-quartic configuration and rational elliptic surfaces, 特異点と多様体の幾何学, 2010年9月15日, 山形大学

[その他]

ホームページ等

本課題の関連した研究会の URL

- ① <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2013.html>
- ② <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2012.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO)  
首都大学東京・理工学研究科・教授  
研究者番号: 30211395

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

岡 睦雄 (OKA MUTSUO)  
東京理科大学・理学部・教授  
研究者番号: 40011697  
島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10235616  
中村博昭 (NAKAMURA HIROAKI)  
岡山大学・自然科学研究科・教授  
研究者番号: 60217883