

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540053

研究課題名(和文) 捩れ構造による三角圏の分析

研究課題名(英文) Torsion structures in triangulated categories

研究代表者

加藤 希理子 (KATO, Kiriko)

大阪府立大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00347478

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、三角圏の捩れ対に焦点を当てた。捩れ対は表現論における基本的な枠組みで、捩れ対があれば圏を部分圏に分解して調べることができる。「良い捩れ対」が発生する仕組みを知り、応用することが本研究の目的であった。得られた成果は次の通りである。(1) 著しく高い対称性を呈する「ルコルマン三角形」を発見、これを用いて2つの圏の三角同値を示した。(2) 「 $n$ 鎖複体」のホモトピー圏および導来圏を調べて、これらが拡大環の(通常の鎖複体の)ホモトピー圏、導来圏と同値であることを示した。(3) 捩れ対の要件として完備性と直交性があるが、完備性のみをみたら弱捩れ対(弱捩れ対)が商三角圏における捩れ対と対応することを示した。

研究成果の概要(英文)：We focused on torsion pairs in triangulated categories. Torsion pairs are basic framework in representation theory. They enable us to decompose a given triangulated category into subcategories. We aimed at studying mechanism of existing "good" torsion pairs and applying them. We have obtained the following results: (1) discovery of a "triangle of recollements" which induces high symmetry and a new triangle equivalence as an application. (2) introducing homotopy and derived categories of " $n$ -complexes" and triangle equivalence of these categories to homotopy and derived categories of normal complexes over a suitable extension ring. (3) one to one correspondence of weak torsion pairs to torsion pairs in a quotient category.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論 圏論

### 1. 研究開始当初の背景

環論におけるホモロジー代数の研究は、加群圏のアーベル圏構造を用いるものが従来の方法であった。これに比べて、複体の三角圏構造を用いた分析は近年、目覚ましい成果を上げてきた。

捩れ対は、表現論においては極めて有用な概念である。ネーター環上の特異圏とは、射影加群のホモトピー商圏  $K(b)$ ,  $-/Kb$  であり、その消失は、環の正則性と同値である。80年代から研究され、特に最近になって盛んに調べられるようになった。

### 2. 研究の目的

研究目的は、三角圏を用いて、環や準同型写像を調べる方法を確立することである。つまり、従来の環上のホモロジー代数では加群圏の持つアーベル圏構造を利用していたが、複体のホモトピー圏の持つ三角圏構造を利用しようということである。三角圏においては  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  が完全列であれば、 $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$  や  $-1C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  も完全列であって、アーベル圏の完全列よりも柔軟である。三角圏は、アーベル圏に比べて柔軟な完全列を持つことから、従来の加群のホモロジー代数的な分析では得られなかった結果が生まれる。たとえば Gorenstein 環のように対称性をもつ環上のホモロジー代数では、ひとつの加群を調べるときに、双対加群やシジジー加群などのホモロジー情報を併せて調べる必要が生じることが多い。したがって加群を複体として扱い、加群圏でなくホモトピー圏や導来圏を研究することが合理的になる。本研究は、以下2点に焦点をあてて進める。  
(1) 環や準同型の性質を記述するような三角圏を見つけること (2) そのための道具として、三角圏の捩れ構造および捩れ構造の導く対称性を研究し、良い捩れ構造を与える仕組みを解明すること。三角圏によるホモロジー代数の手法を開拓すること。特に環論的な性質を記述する三角圏を見つけることが研究の目的である。

### 3. 研究の方法

捩れ対は、三角圏を性質の異なる部分圏に分解するので、三角圏の解析に有用である。良い捩れ対が発生する仕組みを調べることにより、ホモロジー代数的な特徴づけを行う方法を試みた。

### 4. 研究成果

(1) 拡大特異圏  $K(b)/Kb$  と Cohen-Macaulay 安定圏の三角同値、ルコルマン三角形の導入。

射影加群のホモトピー商圏  $K(b)$ ,  $-/Kb$  は特異圏と呼ばれ、その消失は、環の正則性と同値である。80年代末に Buchweitz は、Gorenstein 環上の特異圏が Cohen-Macaulay

加群の安定圏と三角同値になることを示した。この結果は、加群の Cohen-Macaulay 近似の複体版であり、自由加群でない Cohen-Macaulay 加群の存在が環の特異性と同値である事実を三角圏的に説明しているといえる。

研究代表者らは、特異圏の拡大圏である拡大特異圏に注目した。拡大特異圏は、Gorenstein 次元の観点から自然な圏である。次の Buchweitz 型定理を得た：

(定理) 拡大特異圏と拡大行列環の Cohen-Macaulay 安定圏(すなわち特異圏)との三角同値である。

拡大環の Cohen-Macaulay 安定圏は、Cohen-Macaulay 加群の間の写像のなす安定圏という馴染みのないものである点が意外だが、これは上記 Buchweitz の定理と、「拡大特異圏の特異圏による商圏はやはり特異圏である」という観察を併せた三角圏的記述といえる。

証明の鍵となったのが研究代表者らが導入した「ルコルマン三角形」である。ルコルマン三角形とは、 $(B, C), (C, D), (D, B)$  のように連続してかつ回帰的な3対の捩れ対であり、これに関係する全ての部分圏および商圏が三角同値という極めて高い対称性を有する。その対称性ゆえルコルマン三角形を有する2つの圏の間の三角関手は、部分圏への制限が同値なら、関手そのものが同値である。ルコルマン三角形を有する三角圏の最初の報告例でもある。(伊山・宮地との共同研究)

### (2) 対称 Auslander 圏と対称 Bass 圏の研究

上述のように、拡大特異圏は、ルコルマン三角形の最初の報告例であった。その構成が Gorenstein 環の対称性に起因することに着目して、研究代表者らは、双対化複体の惹起する対称性に注目した。双対化加群は、Auslander 圏  $A$  と Bass 圏  $B$  との間の三角同値  $T: A \rightarrow B, S: B \rightarrow A$  を導く。(Iyenger-Krause) 研究代表者らは、これを用いて  $A$  と  $TB$  を貼り合せて対称 Auslander 圏  $A^*TB$  とその双対である対称 Bass 圏  $SA^*B$  を構成した。得られた定理は次の通りである。

(定理) 対称 Auslander 圏  $A^*TB$  と対称 Bass 圏は三角形ルコルマンを有する。

(定理) 対称 Auslander 圏  $A^*TB$  と対称 Bass 圏は三角同値である。

(定理) 環の Gorenstein 性は対称 Auslander 圏と拡大特異圏の一致で判定できる。

(P. Jørgensen との共同研究)

### (3) N-複体の導来圏、ホモトピー圏の研究

ルコルマン三角形を一般化してルコルマン  $n$  角形を定義することができる。三角圏が分

数 Calabi-Yau であるときはルコルマン多角形が自然に表れることがわかった。更にルコルマン多角形の発生構造を知るために、ルコルマン多角形を有する新しい三角圏を調べる動機で始めたのが  $N$ -複体の三角圏である。

複体とは微分写像 2 回の合成が 0 になる次数付き加群である。これに対して微分写像 2 回の合成が 0 になる次数付き加群を  $N$  複体と呼ぶ。 $N$ -複体は Kapranov によって導入され、数理論理などの研究者によって調べられていた。(Ciblis et. al, Dubois-Violette など) 研究代表者らは、 $N$ -複体のホモトピー圏、導来圏を導入した。

(定理)  $N$ -複体のホモトピー圏  $K_n(\text{Proj } R)$  はルコルマン  $2N$  多角形を有する。

ところで拡大行列環を考えると  $N$  複体の導来圏  $D_n(R)$  から  $D(T_{N-1}R)$  への三角関手が得られる。ただし  $T_{N-1}R$  は上三角行列環である。

(定理)  $N$ -複体の導来圏  $D_n(R)$  は  $N-1$  次上三角行列環の通常複体の導来圏  $D(T_{N-1}R)$  と三角同値である。

研究代表者らの予想に反して、 $N$ -複体の三角圏は、既知のものと同値になってしまったのだが、この結果は、三角圏構造に注目する限り  $N$ -複体は新しいものではなく、通常複体と同じであるということがわかった。  
(伊山・宮地との共同研究)

#### (4) 弱捩れ対の研究

対称 Auslander 圏  $A^*TB$  は 2 つの三角部分圏の貼り合せによって得られるが、一般に三角圏  $T$  の三角部分圏  $U, V$  の貼り合せ  $U^*V$  は三角圏にならない。ただし  $U$  から  $V$  への射が自明なものに限るときは、 $U^*V$  は三角圏になることが知られている。

(定理)  $U^*V$  が三角圏になるための必要十分条件は、 $U \cap V$  による商圏  $T/U \cap V$  において  $U, V$  の像  $QU$  から  $QV$  への射が自明なものに限ることである。

特に  $U^*V=T$  となるときには、 $(QU, QV)$  は  $T$  の捩れ対になる。

(定理) 濃密部分圏  $X \subset T$  が与えられたとき、 $U^*V=T$  かつ  $X=U \cap V$  なる三角部分圏の組と商圏  $T/X$  の捩れ対は一対一に対応する。

この意味で、 $U^*V=T$  なる三角圏の対  $(U, V)$  を弱捩れ対と呼ぶ。

(定理) 連続する 2 対の弱捩れ対  $(U, V), (V, W)$  は適切な商圏のルコルマンに対応する。

る。

(定理) 連続かつ回帰的な 3 対の弱捩れ対  $(U, V), (V, W), (W, U)$  は、適切な商圏の三角形ルコルマンに対応する。

(P. Jørgensen との共同研究)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Osamu Iyama, Kiriko Kato and Jun-ichi Miyachi “Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules” Journal of K-theory, 査読有, Vol. 8, no.3, 2011, pp507-542.

Peter Jørgensen and Kiriko Kato, “Symmetric Auslander and Bass Categories”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読有, 2011 年, Vol. 50, no.2,

[学会発表](計 8 件)

Kiriko Kato, Triangulated categories of extensions and triangles of recollements, American Mathematical Society, The 2013 Fall Southeastern Sectional Meeting, University of Louisville, KY, USA, 2013 年 10 月 5 日,

加藤 希理子, 三角圏とホモロジー代数, 研究集会:(非)可換代数とトポロジー, 信州大学 2012 年 3 月 14-16 日

Kiriko Kato, “Recollements of homotopy category and Cohen-Macaulay modules”, International Conference on Representations of Algebras XIV, 2010 年 8 月 15 日,

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

<http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kiriko/research/research.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

加藤 希理子 KATO, Kiriko (大阪府立大学理学系研究科・准教授)

研究者番号：00347478

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：