

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 18 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540054

研究課題名（和文）可換環論：非コーエンマコーレイ環解析の視点から

研究課題名（英文）Commutative algebra — towards a better understanding of non-Cohen-Macaulay rings

研究代表者

後藤 四郎 (GOTO SHIRO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：50060091

研究成果の概要（和文）：

本研究は、「非コーエンマコーレイ環とは何か」という、素朴ではあるが深い問いかけに、正面から向き合うことを目的に開始された。具体的には下記 3 課題

課題(1) (A, m) は Noether 局所環, Q は環 A の巴系イデアルとし, $I = Q : m^q$ ($q \geq 1$) とおく。

(a) イデアル Q が I の reduction となるための条件を, 環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述する。

(b) イデアル Q が I の reduction になるとき, その reduction 数 $r_q(I) = \min \{n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n\}$ を, 環 A や巴系イデアル Q に関する不変量を用いて記述する。

(c) イデアル Q が I の reduction であるとき, blow-up 代数 $R(I)$, $G(I)$, $F(I) = R(I)/mR(I)$ は, どのような環構造を持つか。Cohen-Macaulay 環, Gorenstein 環, あるいは Buchsbaum 環となるための条件を, 環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述する。

課題(2) 局所環 (A, m) 内の巴系イデアル Q の Hilbert 関数と Hilbert 係数 $e_i^Q(A)$ ($0 \leq i \leq d = \dim A$) の挙動を解析し, これらの不変量の挙動や消滅が環 A の構造に与える影響を解明する。

課題(3) 局所環 (A, m) 内の巴系イデアル Q に対し, その冪の Rees 代数環 $R(Q^n)$ ($n \geq 1$) が Gorenstein 環となるための判定条件を求める。

の解明を目指して実施され, 3 年間で満足すべき成果をあげることに成功した。成果は下記 15 編の論文として公表済である。

研究成果の概要（英文）: The final goal of this research is to answer the naive but important question of what non-Cohen-Macaulay rings are. The present targets are the following.

(1) The study of quasi-socle ideals $Q : m^q$, where m is the maximal ideal in a given Noetherian local ring and Q a parameter ideal in it. (2) The analysis of the graded rings associated to $I = Q : m^q$. (3) The study of Gorenstein property in the Rees algebras of powers of parameter ideals. The achievements are summarized into 15 papers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論（含リー環）

1. 研究開始当初の背景

可換環論は D. Hilbert が創始し、E. Noether によって整備された抽象代数学である。J.-P. Serre が homology 代数学を導入して、正則局所環の素イデアルによる局所化は正則であることを証明して以来、急速な発展を示した。主に Cohen-Macaulay 性解析を中心に、20 世紀後半の 40 年間に代数学の諸分野との関連の中で飛躍的に発展したが、しかしながら Cohen-Macaulay 環・Cohen-Macaulay 加群の枠組みから外れると、今日でも未解明の部分が多く残されている。本研究はこのような状況に積極的に対応し、非 Cohen-Macaulay 環とは何かという問いに答えることを最終目的に開始された。

2. 研究の目的

Cohen-Macaulay 性の拡張概念としては、2 種がある。一つは、Buchsbaum 性など generalized Cohen-Macaulay 環がそれであり、もう一つは sequentially Cohen-Macaulay 環と呼ばれるものがそれである。どちらも非常に重要であり、適応範囲の広い理論が展開されている。本研究はこれら先行する理論に十分に関心を持ちつつ、局所環論を深化発展させることを目的とする。

3. 研究の方法

非 Cohen-Macaulay 環とは何かという問題を念頭に置きながら、下記 3 課題の解析を行った。

課題(1) (A, m) は Noether 局所環、 Q は環 A の巴系イデアルとし、 $I = Q : m^q$ ($q \geq 1$) とおく。

(a) イデアル Q が I の reduction となるための条件を、環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述する。

(b) イデアル Q が I の reduction になるとき、その reduction 数 $r_q(I) = \min \{ n \geq 0$

$|I^{n+1} = QI^n \}$ を、環 A や巴系イデアル Q に関する不変量を用いて記述する。

(c) イデアル Q が I の reduction であるとき、blow-up 代数 $R(I)$, $G(I)$, $F(I) = R(I)/mR(I)$ は、どのような環構造を持つか。Cohen-Macaulay 環、Gorenstein 環、あるいは Buchsbaum 環となるための条件を、環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述する。

課題(2) 局所環 (A, m) 内の巴系イデアル Q の Hilbert 関数と Hilbert 係数 $e_i^Q(A)$ ($0 \leq i \leq d = \dim A$) の挙動を解析し、これらの不変量の挙動や消滅が環 A の構造に与える影響を解明する。

課題(3) 局所環 (A, m) 内の巴系イデアル Q に対し、その冪の Rees 代数環 $R(Q^n)$ ($n \geq 1$) が Gorenstein 環となるための判定条件を求める。

4. 研究成果

上記の 3 課題に関し、計画と期待を上回る成果が挙げられた。成果は下記 15 論文にまとめた。各論文と取り扱った内容の概略を述べておく。

論文[15]は、Cohen-Macaulay 局所環が巴系イデアルの冪の parametric decomposition の存在によって特徴づけられるという先行する（後藤四郎 一下田保博の）定理が sequentially Cohen-Macaulay 局所環にどのように拡張されるかを論じたものである。この研究は N. T. Cuong と H. L. Truong によって引き継がれ、good parameter ideal の言葉で完成されるに至って居る。最近の研究[2]は、論文[15]を踏まえて、sequentially Cohen-Macaulay 環内の（優良巴系イデアルを節減に持つある種の） m -準素イデアルに随伴する次数代数が再び sequentially Cohen-Macaulay となるための条件を精密に論じたものであって、Cohen-Macaulay 環上の

Rees 代数に関する古典的な (後藤—下田の) 定理が非常によく拡張されている。また、課題 (1) の quasi-socle ideals に関する研究成果は、論文 [10, 14] に纏められていて、特に [10] の研究は、この分野のその後の発展に少なからざる影響を齎している。イデアルの随伴次数環の構造には原イデアルの構造が良く反映される。論文 [7] は、完全交叉環の極大イデアルの随伴次数環の構造を定義イデアルの生成系を確定するという方向から解析したものであって、基礎環が完全交叉であっても、随伴次数環の挙動は wild であり、殆どの場合に非 Cohen-Macaulay であることを精密に論じている。

局所環の環構造解析の最も有効な手法の一つは、Hilbert 関数・係数解析にある。与えられた m -準素イデアルの Hilbert 係数解析は盛んに行われているが、巴系イデアルの Hilbert 係数解析はほぼ 50 年前に、成田正雄が完成度の高い注目すべき成果を挙げて以来、見るべき発展が無かった。これに対し、V. W. Vasconcelos は 2008 年に研究代表者が横浜で主催した国際研究集会に於いて、巴系イデアルの第一 Hilbert 係数に関連した一連の予想を提示し、研究が再開された。論文 [1, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12] はこれらの予想に挑み、ほぼ完全に解決したものである。非混合的な局所環内の巴系イデアル Q の第一 Hilbert 係数は非正であって、0 となるのは基礎環が Cohen-Macaulay 環の時に限るという予想の解決は論文 [12] 内で行われて、大きなインパクトを齎した。以上、課題 (2) に関連した研究である。

課題 (3) の解析にも注目すべき発展があった。目下、研究分担者の居相真一郎とともに成果の追試を行っている。

研究は不断に継続的に行われる。連携研究者大関一秀との共同研究 [13] や Tran Thi Phuong—松岡直之との共同研究 [3] は、今後の研究の方向を定めるものとして、非常に重要な役割を果たすと考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- [1] N. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, Hilbert coefficients and sequentially Cohen-Macaulay modules, *Journal of Pure and Applied Algebra* **217** (2013), 470–480.
 [2] N. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, The equality $\hat{I}^2 = \sum_{q \in \mathfrak{q}} I_q$ in sequentially Cohen-Macaulay rings, *J. Algebra*, **379** (2013) 50–79.
 [3] S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, *Journal of*

Algebra, **379** (2013), 355–381.

[4] S. Goto, J. Hong, and W. V. Vasconcelos, The homology of parameter ideals, *Journal of Algebra*, **368** (2012), 271–299.

[5] S. Goto, M. Mandal, and J. Verma, Negativity of the Chern Number of Parameter Ideals, *Algebra and its applications, Recent developments*, A. Beg and M. Ashraf (Editors), Narosa, 53–68, 2012.

[6] L. Ghezzi, S. Goto, K. Ozeki, J. Hong, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Variation of the first Hilbert coefficients of parameters with a common integral closure, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **216** (2012) 216–232.

[7] S. Goto, W. Heinzer, and M. -K. Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two, Part III, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 2523–2539.

[8] S. Goto, J. Hong, and M. Mandal, The positivity of the first normalized Hilbert coefficients, *The Proceedings of the American Mathematical Society*, 139 (2011), 2399–2406.

[9] S. Goto and K. Ozeki, Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters, “Commutative Algebra and its Connections to Geometry (PASI 2009)”, 97–118, *Contemp. Math.*, **555**, Amer. Math. Soc..

[10] S. Goto, J. Horiuchi, and H. Sakurai, Quasi-socle ideals in Buchsbaum rings, *Nagoya Math. J.*, **200** (2010), 93–106.

[11] S. Goto and K. Ozeki, Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters, *Nagoya Math. J.*, **199** (2010), 95–105.

[12] L. Ghezzi, S. Goto, K. Ozeki, J. Hong, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals, *J. London Math. Soc. (2)*, **81** (2010), 679–695.

[13] S. Goto and K. Ozeki, The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases –, *J. Algebra*, **324** (2010), 2129–2165.

[14] S. Goto, S. Kimura, T. T. Phuong, and H. L. Truong, Quasi-socle ideals and Goto numbers of parameters, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **214** (2010) 501–511.

[15] S. Goto, Y. Horiuchi, and H. Sakurai, Sequentially Cohen-Macaulayness versus parametric decomposition of powers of parameter ideals, *Journal of Commutative Algebra*, **2** (2010), 37–54.

〔学会発表〕(計 11 件)

○国際会議における招待講演

[1] 後藤四郎, Ulrich ideals and modules, Commutative Algebra Program of MSRI, Fall 2012 ~ March 2013, the Seminar organized by C. Huneke, C. Polini, and B. Ulrich, September 17 (2012), MSRI, Berkeley, USA.

[2] 後藤四郎, Ulrich ideals and modules, I, The 12-th ALGA Meeting dedicated to Steven Kleiman and Aron Simis on the occasion of their 70-th birthdays, August 13 - 17 (2012), IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.

[3] Almost Gorenstein rings of higher dimension, The 3rd Bluegrass Algebra Conference (University of Kentucky, USA), June 13 -15, 2012.

[4] 後藤四郎, Almost Gorenstein rings -- an attempt towards higher dimensional cases --, The 7-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Quy Nhon (Vietnam), 2011 年 12 月 12 日-16 日.

[5] 後藤四郎, Almost Gorenstein rings, Juergen Herzog を囲む可換代数の集い, 大阪大学, 2011 年 6 月 14 日-15 日

[6] 後藤四郎, Almost Gorenstein rings, Midwest Commutative Algebra and Geometry Conference at PURDUE, May 22-26 (2011), Purdue University (West Lafayette, USA).

[7] 後藤四郎, Study of Hilbert functions and coefficients of parameters I, II, III, IV, The 5-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Institute of Mathematics Hanoi, January 5-9, (2010), Hanoi (Vietnam).

○International school での講義

[1] 後藤四郎, Hilbert coefficients of parameters, 5 lectures, ICTP School and Workshop on Local Rings and Local Study of Algebraic Varieties, ICTP (The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics), Trieste, Italy, May 31 - June 11, 2010

○日本数学会特別講演

[1] 後藤四郎, 巴系のホモロジー, 日本数学会年会・代数学分科会特別講演, 2012 年 3 月 28 日

○可換環論シンポジウム講演

[1] 後藤四郎, 松岡直之, Tran Thi Phuong, Almost Gorenstein rings, 第 33 回可換環論シンポジウム, 浜名湖カリアック, 2011 年 11 月 7 日- 11 月 10 日

[2] 後藤四郎, 高橋亮, 大関一秀, Ulrich 加群の一般化, 第 33 回可換環論シンポジウム, 浜名湖カリアック, 2011 年 11 月 7 日-11 月 10 日

〔図書〕(計 1 件)

著書

[1] 後藤四郎, 渡辺敬一, 「可換環論」, 日本評論社, 2011 年 9 月

〔その他〕

○国際研究集会主催

[1] 後藤四郎, The 7-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Quy Nhon (Vietnam), December 12-16, 2011

[2] 後藤四郎, The 5-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Institute of Mathematics Hanoi (Vietnam), January 5-9, 2010

○受賞

[1] 後藤四郎, 日本数学会代数学賞, 2012 年 3 月 28 日

[2] 後藤四郎, Degree of Doctor Honoris Causa from VAST (Vietnamese Academy of Science and Technology) in recognition of outstanding contributions to science and education, 09/11/2011

6. 研究組織

(1) 研究代表者

後藤 四郎 (GOTO SHIRO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号: 50060091

(2) 研究分担者

大関 一秀 (OZEKI KAZUHO)
山口大学大学院・理学研究科・専任講師
研究者番号: 70445849

居相 真一郎 (IAI SHINICHIRO)

北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 50333125