様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２５年　４月２８日現在

機関番号：34315
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010　～　2012
課題番号：22540056
研究課題名（和文）　ベクトルバンドルの方法による正標数の可換環論の研究
研究課題名（英文）　study of commutative rings of positive characteristic using vector bundles

研究代表者
高山　幸秀（TAKAYAMA YUKIHIDE）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：20247810

研究成果の概要（和文）：正標数の３次元 Calabi-Yau 多様体について、小平消滅定理の反例が存在するか？という問題をとりあげ、Raynaud-向井のアイディアをつかった反例構成の可能性、および、標数零への持ち上げが不可能な正標数の３次元 Calabi-Yau 多様体の代表的な２例について、広い範囲の豊富因子に対して１次元の小平型消滅定理が成り立つことを示した。

研究成果の概要（英文）：I considered the problem whether there exist counter-examples to Kodaira type vanishing of cohomoogies for Calabi-Yau 3-folds in positive characteristic. I have studied possibility of constructing the counter-examples via Raynaud-Mukai ' s idea and for the main two examples of unliftable Calabi-Yau 3-fods I showed that Kodaira type vanishing holds to some extent.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数多様体、正標数、ベクトルバンドル、小平消滅定理、持ち上げ可能性

１．研究開始当初の背景

正標数の代数多様体上の半安定層の有界性予想は、一部が証明されていたものの、完全な解決をみたのは A. Langer による。そこでは捩れの無い半安定層 E の Frobenius 射 F による引き戻し F^*(E)が半安定にならないとき、適当な自然数 e によって(F^e)^*(E)の Harder-Narasimhan フィルトレーションが強半安定になること(fdHN 性)が示され、これが有界性の証明に有効に使われた。 fdHN 性は H. Brenner と V. Trivedi によって tight closure 理論における２次の Hilbert-Kunz 重複度の有理性の証明に使われた。さらに Brenner は、多項式環のイデアル I の生成元集合から作られるある種のベクトルバンドルに付随する torso を考察し、そのアフィン性が tight closure I^*を特徴づけるという驚くべき発見に基づき、tight closure と

plus closure の精密な比較，tight closure の局所化予想の反例などの目覚しい成果を挙げている。ここには、Langer の結果のみならず、ベクトルバンドルについての古典的、あるいは、最新の研究成果が随所に用いられている。このように、ベクトルバンドルの理論を可換環論の研究に応用するという Brenner のアイディアは、ここ数年間に急速に注目を集めつつあり、特に２次元の次数付き環については、比較的多くのことが知られている代数曲線上のベクトルバンドル理論を基に、目覚しい発展がみられる。

いっぽう、正標数の代数多様体の「病理現象」としては、半安定層の有界性にまつわる問題にとどまらず、これまでにさまざまなものが指摘されている。その中でも小平消滅定理の M.Raynaud の反例と Raynaud-Deligne-Illusieによる２次Wittベクトル持ち上げ可能な場合の小平消滅定理は古典的である。 Raynaud の反例構成では、丹後によって発見された正標数の代数曲線上のある種の豊富因子を用い、それに付随する階数２の安定なベクトルバンドルを考える。そこでは、この安定層の Frobenius 射による引き戻しが安定にならないという性質が効果的に使われている。 Raynaud の反例は向井によって一般次元まで拡張され、任意次数の偏極多様体(X, L)で、H^1(X, L^(-1))が自明にならないものが構成された。さらに、小平消滅定理の反例とベクトルバンドルの関係については、N.I.Shepherd-Barron らによっても考察され、３次元 Fano 多様体における小平消滅定理の反例や一般型代数曲面以外ではほとんどの場合小平消滅定理がなりたつこと(これは丹後や向井による結果の再発見ともいえる)などが見出された。小平消滅定理の反例については、Raynaud-向井の方法以外にも L.Szpiro[Sz]や P. Russel などによって特に１９８０年前後を中心に散発的に報告されているが、組織的な構成法や反例となる偏極多様体の特徴づけなどは D. Mumford や L. Szpiro などの研究などもあるが、いまだに十分に解明されているとは言えない。

さて、申請者は次数付き孤立非Ｆ有理特異点(R,m)の局所コホモロジーの非消滅性の一部が、m を台とする最高次局所コホモロジーにおける零加群の tight closure によって制御できることを示した。R が標数０の次数付き孤立非有理特異点の generic mod p reduction によって得られている場合は渡辺敬一、原伸生、K. Smith らによる有理特異点のＦ有理特異点による特徴づけから導かれるのに対し、一般の場合を考察したものである。ここではある種の tight closure の比較を行い、それらが一致しない場合にコホモロジー非消滅が成り立つことが示されているが、この結果は Brenner によるベクトルバンドルの方法によって更に改良、精密化できるものと期待される。さらに申請者は Raynaud の反例の自明な一般化を考え、その偏極多様体(X, L)について、コホモロジーH^i(X, L^n), ただし i, n は任意整数、を計算し、その消滅・非消滅を考察した。ここでは代数曲面上のベクトルバンドルの大域切断のなす空間の非自明性を調べる必要性が明らかになった。

小平消滅型定理は Huneke-Smith のアイディアにより次数付環の局所コホモロジーの消滅次数に関する定理として読み替えられることができ、単項式イデアルの剰余環に関しては任意標数において可換環の小平型消滅定理が成り立つことが申請者によって示されている[Ta3]。また、そのような具体例の構成方法もいくつか発見されている（たとえば[GT]）. 一方、正標数における小平消滅定

理の反例は、単項式イデアルでない一般のイデアルに対する可換環の小平型消滅定理の反例を意味するが、環論的に特に興味深い例は非常に豊富な可逆層 L による反例である。Raynaud の反例では L は豊富ではあるが非常に豊富ではなく、そのようなものが存在するかについてはよくわかっていない。 そこで本研究では、Brenner のアイディアや正標数のベクトルバンドルの研究成果を取り入れることにより、申請者がこれまで得てきた結果の改良・発展を図るとともに、Raynaud-向井による反例、特に向井による一般次元の反例とその周辺において未解明の諸問題について新たな知見を模索し、最終的には可換環論に新しい興味深い研究対象を見出すことを目標とする。

２．研究の目的

本研究は、近年新たな発展をみた正標数の代数多様体のベクトルバンドルの理論を可換環論に応用する H. Brenner のアイディアを発展させ、密着閉包の概念に基づく特異点理論やコホモロジーの消滅定理における新たな知見を得ることを目的とする。特に、正標数の代数幾何学や可換環論において、申請者がこれまで得てきた結果の改良、発展を図るとともに、Raynaud-向井による小平消滅定理の反例、特に向井による一般次元の反例とその周辺において未解明の諸問題について新たな知見を模索し、最終的には可換環論に新しい興味深い研究対象を見出すことを目標とする。

３．研究の方法

平成２２年度：

この年度は、申請者がこれまで得てきた研究成果を再検討し、その精密化や一般化、周辺の新しい問題の発見を模索することを中心に研究を進める。具体的には、

(1) 孤立非 F 有理特異点の局所コホモロジーの非消滅性の問題を、tight closure のベクトルバンドルによる幾何学的解釈の観点から見直し、より精密な結果や具体例の構成を追求する。
(2) 拡張された偏極 Raynaud 曲面(X,L)のコホモロジーH^i(X, L^n)の計算を、ベクトルバンドルの既知の成果を使ってより精密化することを試みる。

また、上記(1)(2)に対応するより新しい方向として

(3) F 特異点、および標数０の代数多様体における乗数イデアル(multiplier ideal)の正標数における対応物と考えられている test ideal の概念を、tight closure のベクトルバンドルによる幾何学的解釈の観点から再検討する。
(4) 向井による Raynaud の反例の一般次元化について、上記２．と同様の問題をはじめとする、未解明の諸問題を考察する。

さらには、

(5) 多項式環のイデアルの極小自由分解の標数への依存性と局所コホモロジーの消滅・非消滅次数の関連等の問題を、ベクトルバンドルの方法の観点から再検討する。

研究を進めるにあたっては、日本大学文理学部で渡辺敬一氏を中心に行われている、特異点論月曜セミナーや関連する研究集会等への参加を通じて、最新の情報収集を行う。また、本研究にあたっては、可換環論や代数幾何学の最新の研究成果を踏まえる必要があるため、可換環論シンポジウムや代数幾何学シンポジウム、あるいは海外の研究集会など

への参加によって情報収集を行う。

平成２３、２４年度：

平成２３年度は基本的には平成２２年度の継続であるが、平成２２年度で検討した問題のうち、何らかの進展がみられたものについて重点的に検討を進める。また、平成２２年度におこなったさまざまな考察を踏まえ、平成２３年度以降は、より難しい大きな問題へのアプローチについて何らかの糸口を掴むことを模索し、考察の対象をすこしずつ広げてゆく予定である。進展が期待できそうなものが見つかり次第、重点的に検討を進める。具体的には、以下の問題を考察したい。

(6) 小平型消滅が成り立たない、あるいは、成り立つ偏極多様体(X, L)がピカール群Pic(X)や豊富錘 Amp(X)の中でどれぐらいの広がりをもっているか？たとえば L が非常に豊富であることはありうるか？もし、そのようなものがあればsection ringを考えることにより、２．のタイプの計算結果を経由して標準的次数付 K 代数の局所コホモロジーの興味深い例を構成できることになり、可換環論的に極めて興味深い対象を発見できたことになる。

(7) 正標数の代数曲面の特異点解消を使った特異点（たとえば有理特異点）と tight closure によって定義されたF特異点（たとえば F 有理特異点）の関連を、ベクトルバンドルによる tight closure の幾何学的解釈の観点から理解できないか。

(8) その他、強半安定ベクトルバンドルと可換環論に関わる諸問題。正標数版極小モデル理論についての川又、Kollar の結果や N.I.Shepherd-Barron らによる正標数の一般型曲面の geography に関する結果の可換環論的意味。椙元氏らによるガウス写や自己双対性から見た正標数の「病理」と Raynaud-向井の反例の関連等、正標数の代数幾何学と可換環論に関わる問題。

研究を進めるにあたっては、平成２２年度と同様に国内外の各種セミナーや研究集会への参加により、常に最新の研究動向を把握する。また、研究成果の国内外のシンポジウム等での研究発表により、広い範囲の研究者から意見を得る。

４．研究成果

平成２２年度の後期は、ベクトルバンドルの方法を密着閉包理論に導入した、オスナブリュック大学（ドイツ）のBrenner教授のところに滞在し、定期的に議論する時間を持った。その結果、代数曲線上のベクトルバンドルについては、満足できる結果が得られているが、代数曲面やそれ以上の次元の代数多様体上のベクトルバンドルを密着閉包理論に応用するためには、次元が上がることによって自由度が上がってしまうコホモロジーを統制しなければならず、この問題が非常に困難なことが分かった。オスナブリュック滞在中に何らかのアイディアを模索したが、残念ながらうまい方法は見つからなかった。ベクトルバンドル関係の研究は、その後進展することはなかった。

いっぽう、１次元コホモロジーの小平消滅定理の反例を構成する方法として、３次元代数多様体に使えるものは、Raynaud-向井構成と呼ばれるものぐらいしか知られていない。そこで、これを使ってCalabi-Yau 3-foldが作れないか考えてみたが、この構成法のままでは駄目だが、標数２または３の場合、少し違う方法を取れば、ある条件を仮定すれば少なくとも標準層が自明になるものは作れることがわかった。その条件とは、小平消滅定理の反例となるようなある種の一般型曲面が存在するというものだが、極小曲面ではそのようなものが存在しないことはEkedahlによって示されている。この条件を満たすような曲面が存在するかどうかについては、未解決のまま残ってしまったし、構造層の1,2次のコホモロジーが自明になる条件についても、完全には解明し切れていない。また、もし標数５以上の Calabi-Yau 3-fold　Xで小平消滅定理が成り経たないものが存在した場合、任意の豊富因子 H に対して、H^1(-H)

を、反例を与える豊富因子Ｄを使って書き表す公式を与えた。この公式は、小平消滅定理が成り立つことの証明に応用できるかもしれない。以上の結果については、Proceedings of Americal Mathematical Society の論文誌で公表された。
その後、平成２３年の半ば頃から、標数零に持ち上げ不可能な Calabi-Yau 3-fold の例に注目し、廣門正行、S. Schoeer, T. Ekedahl, S.Cynk & D. v.Straten, M. Schuett, C. Schoen らの文献を調査し、廣門正行が１９９９年に与えた例について、小平消滅定理が成り立つかどうか考察してみた。その結果、標数分だけ冪したものが大域切断を持つような豊富因子については、必ず１次元の小平消滅定理が成り立つことが分かった。同じ結果は S. Schoeer の例についても言えることがわかった。これが平成２４年の春ごろである。この成果の一部については、プレプリントサーバーで公表し、学術雑誌に投稿中である。この方向でさらに研究を進めるには、豊富な因子を詳細に調べる必要があるが、いまのところ有効なアイディアは見つかっていない。
持ち上げ不可能な Calabi-Yau 3-fold の研究を切欠に、この多様体だけに限って小平消滅の反例、ホッジ・ドラムスペクトル列の縮退、無限小変形でどのレベルまで持ち上げ可能かといった所謂「正標数の病理現象」の背景を調べる方向に向かって行った。
平成２４年度の後半は、特にホッジ・ドラムスペクトル列の問題を調べるのに必要となる、クリスタリンコホモロジーやドラム・ヴィット複体、傾斜スペクトル列とそのトーション理論を調べ始め、T. Ekedahl が廣門の最初の例と Schoeer の例について行ったコホモロジーの計算方法を理解することを目標に努力したが、残念ながら平成２４年度中に終えることはできなかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
Y. Takayama, “Raynaud-Mukai construction and Calabi-Yau 3-folds in positive characteristic, Proceedings of American Mathematical Society, Vol.140, No.12 (2012) 4063–4074 （査読あり）

〔その他〕
ホームページ等（プレプリントサーバー）

Kodaira type vanishing theorem for the Hirokado variety, arXiv:1204.1622, (2012)

６．研究組織
(1)研究代表者
高山 幸秀（TAKAYAMA YUKIHIDE）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：20247810