様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　６月１４日現在

機関番号：34416
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540058
研究課題名（和文）
ホップ代数の多項式不変量とその変種に関する研究
研究課題名（英文）
Research on variants of the polynomial invariant of Hopf algebras

研究代表者
和久井　道久（ WAKUI MICHIHISA ）
関西大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：60252574

研究成果の概要（和文）：
多項式不変量の、(2,q)-トーラス絡み目の量子不変量を用いた変種やホップ代数の球面構造、ピボタル構造を用いた変種を定義し、その基本的な性質を調べ、多くのホップ代数について具体的な計算を行った。また、シュレディンガー表現と呼ばれる、ホップ代数の量子二重化の特別な表現が、ホップ代数の表現圏のテンソル同値不変量であり、それが有用な不変量であることを示した。

研究成果の概要（英文）：
Various variants of our polynomial invariant of Hopf algebras are introduced, and examined those properties. Computational results are obtained for several Hopf algebras. It is also showed that the Schödinger representation of the Drinfel'd double of a Hopf algebra is a tensor Morita invariant of the Hopf algebra, and it is a useful invariant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数学，トポロジー，環論，表現論，ホップ代数，結び目

１．研究開始当初の背景

固定された次元を持つホップ代数の同型類を決定する問題は、ホップ代数に関する基本的な問題であり、Kaplansky の第 10 予想と関連して古くから研究されてきた。この分類問題に関しては近年、増岡彰氏、Stefan 氏、Natale 氏、Kashina 氏、Andruskiewitsch 氏、Schneider 氏らによる目覚ましい進展がある。一方、丹原氏と山上氏の研究に代表される、環を１つ与えたとき、表現環がそれに一致するホップ代数をテンソル森田同値で分類する(つまり、ホップ代数の表現圏をテンソル同値の下で分類する)という大きな流れが起きている。代表者が 2010 年に導入した、有限次元半単純かつ余半単純ホップ代数に対する多項式不変量は、この大きな流れの中に位置している。実際、その多項式不変量はホップ代数のテンソル森田同値不変量になっており、多項式不変量によって表現環が同型であるような多くのホップ代数の表現圏を区別することができる。さらに、有理数体上定義された有限次元半単純ホップ代数を有

限次ガロア拡大によって係数拡大して得られたホップ代数に対しては、多項式不変量の係数が整数になることや、基礎体の適当な有限次分離拡大をとった後では、それ以上基礎体を拡大しても、多項式不変量は変化しないこともわかっている。

多項式不変量はこのような非常に興味深い性質を持つものの、半単純かつ余半単純なホップ代数に対してしか定義されないこと、組み紐構造が存在しないものに対しては無力であること、計算するためにすべての組み紐構造とすべての(絶対)既約な表現を求めなければならないこと、などの問題点を抱えていた。

２．研究の目的

代表者により導入されたホップ代数の多項式不変量が、自明な結び目の量子不変量を基礎にして定義されていることと、ホップ代数の組み紐構造を用いて定義されていることに着目し、多項式不変量の「変種」、特に、トーラス結び目の量子不変量やホップ代数の球面構造を用いた変種を導入し、その計算を行ったり性質を調べたりすることにより、多角的に多項式不変量について調べる。

多項式不変量およびそのさまざまな変種を導入する最大の動機は、結び目に対して定義される強力で有用な量子不変量をホップ代数の不変量として活用して研究したい、ということにある。量子不変量を結び目と組み紐構造のペアリングとして捉え、結び目を１つ固定して組み紐構造全体上で定義される関数を考えると、ホップ代数（の表現圏）の不変量が得られる。このとき、組み紐構造の分だけ不変量の値が得られるが、本研究では、単にそれらを並べた数の列を考察するのではなく、それらの母関数として定義される多項式を考察するところにある。多項式の形に「まとめる」ことで、ホップ代数の表現圏の性質を多項式の性質(係数の整数性や基礎体の係数拡大の下での安定性など）に反映させて調べることができるようになる。

すでに、多項式不変量について知られている結果(テンソル森田同値性の判定に有効、基礎体の係数拡大の下での不変量の安定性など)は、本研究で考察される多項式不変量の変種についても成り立つであろうと予想される。そして、結び目理論におけるスケイン関係式の手法を用いることにより、不変量の変種同士の間の関係も解明されるものと期待できる。また、多項式不変量および本研究で考察されるその変種は圏論の言葉で記述することができるので、ホップ代数の表現圏のみならず、より一般のテンソル圏に対しても定義することができる。計算が進み、有用性が明確になれば、ホップ代数の表現圏以外のテンソル圏の研究に対しても、新たな道具として使われていくものと期待される。

３．研究の方法

(1) 多項式不変量の場合の証明方法を参考しながら、「変種」に対してどこまで類似の結果が成り立ち、どのようなことが同じように行かないのかを調べる。

特に、多項式不変量 $P_A(\mathrm{x})$のトーラス結び目の量子不変量による「変種」を考える。トーラス結び目 Tn はツイストの数 n によってパラメータづけされた結び目の系列であり、その中には自明な結び目が含まれる(T1 がそれに相当する)。多項式不変量の定義式の中の $\dim_R$Ｖは自明な結び目の量子不変量と解釈できるので、これをトーラス結び目 Tn の量子不変量 Q(Tn;Ｖ)に置き換えてホップ代数の不変量(の系列)を定義し、その性質を調べる。但し、単純に置き換えるだけでよいのか、ツイストの数ｎに応じて何らかの補正が必要となるのかは、具体的な計算を通じて検討しなければならない。

この研究では、トーラス結び目の量子不変量 Q(Tn;Ｖ)を如何にして計算するかが鍵となる。１つのアイデアはＶ⊗Ｖを既約分解し、その分解に応じて準三角構造 R のＶ⊗Ｖへの作用 c_R を射影作用素の直和に分解することである。そうすればツイストの数ｎが大きくなっても c_R^{n} を計算することができる。具体的なホップ代数の具体的な既約表現Ｖに対してＶ⊗Ｖの既約分解を求めるときには、表現環を決定したときの計算手法や結果が役に立つ。しかし、Ｖ⊗Ｖの既約分解の計算が難航することもあるかもしれない。その場合には、T2(ホップ絡み目) や T3(三つ葉結び目)など小さい値の n に対して実験的な計算をして、一般のｎの場合を予想する方法をとることになる。量子不変量の具体的な計算に関しては、低次元位相幾何学の分野ではすでにそのノウハウも蓄積されているので、専門家にも意見を聞きながら進めていく。

多項式不変量はさまざまなよい性質を持っているが、トーラス結び目による「変種」についても同様のことが言えるのかどうかを調べる。特に、係数の整数性が維持されるのかどうか、整数でない場合には代数的整数の範囲に納まっているのかどうか、同じ表現環を持つホップ代数の表現圏の組の中には多項式不変量で区別できなかったものがあるが、トーラス結び目を用いた場合にはそれらを区別できるのかどうか等について、調べていく。

(2) 有限次元準三角ホップ代数における Drinfel'd 元の性質、特に、指数の有限性を用いて、Reshetikin と Turaev の方法で構成される組み紐群の表現の指標が持つ性質(多項式不変量の根の性質)を調べる。

(3) 群ホップ代数やKac-Paljutkin型ホップ代数などについては、代表者や鈴木智支氏により、組み紐構造が完全にわかっているものがある。それを求める際に得た技術を生かして、それらの球面構造やピボタル構造を決定し、多項式不変量の変種を計算する。

準三角構造の代わりに球面構造を用いて多項式不変量の変種を考える１つの理由は、ホップ代数の球面構造を求めるには自乗が１になる群的元であって中心に属するものを決定すればよいので、準三角構造を決定するよりもはるかに易しいからである。しかし、球面構造による変種がどの程度ホップ代数の表現圏の不変量として有効なのかは未知数であるし、多項式不変量との関係もよくわからない。そこでまずは、Kac-Paljutkin代数やその一般化を含む鈴木智支氏により発見されたホップ代数の系列について、多項式不変量と球面構造による変種に現れる多項式を比較することから始めたい。このホップ代数の系列は多項式不変量の計算で詳しく研究しているので、そこで培ってきた技術をもとに計算を進めることができる。

一般に、準三角構造から球面構造は定まるが、逆は成立しない。異なる組み紐構造が同じ球面構造を定めるための必要十分条件を見つけて、多項式不変量と球面構造による変種の関係、特に、多項式不変量は球面構造による変種で割り切れるかどうかを調べたい。また、組み紐構造を用いて定義される多項式不変量に関する結果が、球面構造を用いて定義される変種に対しても成り立つのかどうか検討したい。

2009 年にアルゼンチンのコルドバで開かれた会議「Hopf Algebras, Quantum Groups and Tensor Categories」で講演させていただいた折に、Ng 氏から多項式不変量に関していくつかの提案を受けた。Ng 氏は Schauenburg 氏とともにホップ代数に対して高次フロベニウス-シューア指標を導入し、ホップ代数の表現圏に関する優れた結果を導いている。高次フロベニウス-シューア指標はホップ代数の球面構造に深く関係していることから、多項式不変量と高次フロベニウス-シューア指標との間の関係も示唆される。多項式不変量、球面構造を用いて定義される変種と高次フロベニウス-シューア指標との関係についても調べていきたい。

(4) ホップ代数の量子二重化が標準的な組み紐構造を持つことに着目し、その表現を用いてホップ代数の表現圏のテンソル森田同値不変量を構成する(これは多項式不変量のある特別な因子だけを見ることに相当する)。本研究では、シュレディンガー表現を用いる。筑波大の増岡彰氏の助言に基づき、宮下-Ulbrich 作用、Yetter-Drinfel'd 加群、モノイダル圏の中心、Radford の誘導関手などの概念を用いて、シュレディンガー表現に圏論的な解釈を与える。

４．研究成果

(1) 多項式不変量の、(2,q)-トーラス絡み目の量子不変量を用いた変種として、ホップ代数 A 上の絶対既約な左加群 M に付随する(2,q)-トーラス絡み目の量子不変量を根にもつ多項式を導入した。この多項式はホップ代数の表現圏のテンソル不変量になる。群ホップ代数やKac-Paljutkin 型ホップ代数等に対する計算結果より、基礎体が有理数体の有限次ガロア拡大ならば、その多項式は整数係数となることが期待されるが、証明はできていない。ただし、絶対既約な左 A 加群 M に対する(2,q)-トーラス絡み目次元自体は代数的整数になることは証明できた。これらの研究成果は 2010 年 10 月 18 日に筑波大学で行われた研究集会「ホップ代数と量子群」において発表された。

(2) シュレディンガー表現と呼ばれる、ホップ代数の量子二重化の特別な表現が、ホップ代数の表現圏のテンソル同値不変量であることを、シュレディンガー表現がホップ代数の単位表現を Radford の誘導関手によって写したものであることを示すことにより、示した。この結果から、シュレディンガー表現に対して、Reshetikin と Turaev の方法で組み紐群の表現を構成し、その指標をとることで、ホップ代数のテンソル森田同値不変量が大量に構成される。中でも閉包がホップ絡み目になる組み紐に対して不変量の計算公式を導き、具体的な計算を行った。特に、有限群 G の群ホップ代数の場合、シュレディンガー表現のホップ絡み目次元は G のすべての元にわたる中心化群の位数の総和に等しくなり、この量が圏論的意味を持つことがわかった。また、清水健一氏により、量子二重化の正則表現ではホップ代数とその双対ホップ代数との差を捉えることができないことが知られているが、シュレディンガー表現を用いるとそれらを区別できるときがあることがわかった。これらの研究成果は 2012 年 9 月 4 日に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会「ホップ代数と量子群---応用の可能

性」において発表された。

(3) ホップ代数の球面構造、および、それよりも緩い条件で定められるピボタル構造を用いて、多項式不変量の変種を２つ定義し、その基本的な性質を調べ、多くのホップ代数について具体的な計算を行った。残念ながら、組み紐構造を用いた元々の多項式不変量では違いを捉えることができていた２つのホップ代数が、ピボタル構造を用いた変種では同じ多項式になってしまうことがあることがわかった。その要因を探る中で、増岡彰氏、清水健一氏との共同研究により、ピボタル構造がホップ代数の表現環によって決まるという事実を示すことができた。これらの研究成果は 2012 年 12 月 10 日に日本大学文理学部で行われた研究集会「可微分写像の特異点とその応用」において発表された。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① 和久井道久, Schrödinger representations of Drinfel’d doubles of Hopf algebras from the viewpoint of tensor Morita invariants、数理解析研究所講究録 1840、査読無、2013、89-108.

〔学会発表〕（計３件）
①和久井道久, 球面構造を用いたホップ代数の多項式不変量の変種, 研究集会「可微分写像の特異点とその応用」, 2012 年 12 月 10 日, 日本大文理学部.

② 和久井道久, Schrödinger representations of Drinfel’d doubles of Hopf algebras from the viewpoint of tensor Morita invariants, 研究集会「ホップ代数と量子群---応用の可能性」, 2012 年 9 月 4 日, 京都大学数理解析研究所.

③和久井道久, Tensor Morita invariants of finite-dimensional Hopf algebras associated with the Hopf link, 研究集会「ホップ代数と量子群」, 2010 年 10 月 18 日, 筑波大学.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
和久井　道久（Wakui Michihisa）
関西大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：60252574

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：