

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 17日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540060

研究課題名（和文） 超曲面単純 K3 特異点の構造

研究課題名（英文） The structures of hypersurface simple K3 singularities

研究代表者

片長 敦子 (KATANAGA ATSUKO)

信州大学・全学教育機構・講師

研究者番号：20373128

研究成果の概要（和文）：非退化な斉次多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点のリンクとして現れない実 5 次元多様体があり、非退化な斉次多項式でない多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点のリンクとして無限個実現できた。さらに、非退化な斉次多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点のリンクの微分同相型は、例外集合として現れる正規 K3 曲面の特異点の構造と関連していることを明らかにした。また、ある複素 3 次元超曲面孤立特異点の実 5 次元リンクの実 7 次元球面へのはめ込みを、ある条件のもとで正則ホモトピーに関する分類を行った。

研究成果の概要（英文）：We show the existence of infinitely many links of non-degenerate simple K3 singularities defined by non-quasi-homogeneous polynomials, which do not appear in the case of the singularities defined by quasi-homogeneous polynomials. Moreover, we give a result that relates the diffeomorphism types of the links of non-degenerate semi-quasi-homogeneous hypersurface simple K3 singularities with the singularities of the normal K3 surface that appears as the exceptional divisor of the resolution of the singularity. We also classify links of the some complex 3-dimensional hypersurface isolated singularities up to regular homotopies under some conditions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：特異点論

1. 研究開始当初の背景

特異点の研究は、国内・国外ともに年々盛んになってきており、各分野で現われる特異点について、それぞれの手法が開発され、研究が進んでいる。このことから、特異点の研究の重要性と特異点研究の各分野との交流の必要性は益々増してくると思われる。

本研究では、孤立特異点、特に超曲面孤立特異点を扱った。代数幾何学的には、孤立特異点の多重種数を用いた分類が既に完成している。歴史的には、まず超曲面孤立特異点の分類が泊昌孝氏（日本大）と渡辺公夫氏（早稲田大）（1990年）により完成され、その後、一般に正規孤立特異点の分類が石井志保子

氏(東工大)(1990年)によって完成された. 個々の特異点の性質の研究について, 複素 2 次元特異点の場合は様々な観点からかなり詳しく研究されているが, 高次元特異点については扱いが難しいことから, ある限られた特異点についてのみ研究がなされていた.

本研究対象である単純 $K3$ 特異点については, 石井志保子氏(東工大)と渡辺公夫氏(早稲田大)(1992年)によって特異点の幾何学的特徴づけが次のように明らかになっている: 単純 $K3$ 特異点であることと, その Q -分解的極小モデルの例外因子が既約な正規 $K3$ 曲面であることは同値である. また, 非退化な定義多項式で定義された超曲面単純 $K3$ 特異点については, 米村崇氏(1990年)により 95 組に分類され, 各クラスを代表する定義多項式も具体的に与えられていた. さらに特異点を解消したときに現われる正規 $K3$ 曲面上に現れる特異点についても完全に決定されていた.

位相幾何学的には, 複素超曲面孤立特異点の研究は **K. Brauer** 氏(1928年)による複素 1 次元曲線における研究が最初である. 特異点の位相幾何学的性質は特異点のリンクの位相型とリンクの球面への埋め込み方により決定されることが証明され, **J. Milnor** 氏(1968年)が開発した **Milnor fibration** により, 特異点に関する多くの重要な事実が明らかになった.

複素 2 次元超曲面孤立特異点の場合は, **P. Orlik - P. Wagreich** (1971年)や **W. D. Neuman** (1981年)によって特異点のリンクの位相幾何学的性質は, 特異点の良特異点解消の例外集合の双対グラフにより完全に決定されることが証明された. 高次元においては, **E. Brieskorn** (1966年), **F. Hirzebruch** (1966, 1967年)による特異点のリンクとして現われる **exotic** 球面の驚くべき発見があるが, 個々の特異点の性質そのものについての研究はあまり見当たらなかった.

ところで, 実 5 次元リンクの微分同相型は **Smale** 氏のスピン構造を持つ実 5 次元多様体の分類結果から, リンクの整係数 2 次元ホモロジー群で完全に決定されることが知られている. リンクの整係数 2 次元ホモロジー群を求めるためには, **Milnor** ファイバーの整形数 3 次元ホモロジー群の自己同型写像である **Milnor** モノドロミーを決定すればよい. そこで研究代表者は中本和典氏(山梨大)との共同研究において, 比較的扱いやすい **Bieskorn-Pham** 型多項式で定義された複素 3 次元超曲面对数的標準孤立特異点のリンクの微分同相型の決定に取り組み, 完全に決定することに成功した(2008年).

上記の研究において得られた成果の中で, 「**Brieskorn-Pham** 型多項式で定義された単

純 $K3$ 特異点のリンクの微分同相型は, 実 2 次元球面と実 3 次元球面の直積のいくつかの連結和になる」という結果に注目した. 単純 $K3$ 特異点は上記で述べたように, 石井志保子氏と渡辺公夫氏の幾何学的特徴づけや米村崇氏による非退化な超曲面単純 $K3$ 特異点の研究があり, 特に米村崇氏が決定した 95 組の定義多項式は, 位相幾何学の特異点の問題として扱うことが可能であることに気づいた. 従って, **Bieskorn-Pham** 型多項式で定義された複素 3 次元超曲面对数的標準孤立特異点の次の研究対象として, 超曲面単純 $K3$ 特異点についての研究を行うことにし, 95 組の単純 $K3$ 特異点のリンクの決定を試みた. その際, 2008 年の共同研究で使用したモノドロミーのさらに緻密な計算を行う方法で 83 組についてはリンクの微分同相型が決定できたが, 残りの 12 個については, **Orlik** 予想に関する難しい状況にあることがわかり, モノドロミーを用いる同じ方法では計算不可能であると判断した.

2. 研究の目的

超曲面単純 $K3$ 特異点は高次元特異点の中でも比較的扱いやすく, ある適当な特異点解消を行うことにより, その例外集合として特異点を持つ $K3$ 曲面が現れる. このことから, $K3$ 曲面の豊かな構造が特異点の構造に反映されていると予想できる. 従って, 超曲面単純 $K3$ 特異点の位相幾何学および代数幾何学的構造, さらにこれらの構造の関係を明らかにすることが本研究の目的であった.

3. 研究の方法

複素 2 次元特異点の場合において, リンクと例外集合との間に深い関係があるのと同様に, 超曲面単純 $K3$ 特異点のリンクについても特異点のある解消で現われる正規 $K3$ 曲面との間に何らかの関係があると予想した. そこで, 米村氏が見つけた 95 組の超曲面単純 $K3$ 特異点のリンクの微分同相型を決定するための新しい手法として, 特異点の解消を用いる着想に至った.

①超曲面孤立特異点の位相は, 特異点のリンクの位相型とリンクの球面への埋め込まれ方で決定されることが知られていることから, **Milnor fibration** や特性多項式など位相幾何学的な手法を用いた.

②単純 $K3$ 特異点は, ある適当な特異点解消を行うことにより, その例外集合として特異点を持つ正規 $K3$ 曲面が現れる. そこで特異点を解消するためにトーリック幾何における特異点解消を用いた. すなわち, 特異点を解消するために **weighted blow up** を扱うが, その際, 例外集合として現れる正規 $K3$ 曲面は一般に特異点を持つ **weighted projective space** に埋め込まれている. これを突破する

ためにトーリック多様体の手法を用いることでさらにその特異点を解消し、解消して現れた多様体の位相幾何学的な構造を詳しく調べた。最終的には Smale 氏のスピン構造を持つ単連結な実 5 次元多様体の分類結果を用いて、リンクの微分同相型の完全な決定を目指した。

また本研究目的を達成するために以下の活動を行った。

国内：研究集会やセミナーへの参加及び専門家との研究打ち合わせや発表

国外：国際研究集会に出席し、専門家との研究打ち合わせおよび発表

4. 研究成果

本研究において、超曲面単純 K3 特異点の中でも米村氏の分類によって得られている 95 個の場合に特に注目して研究を行い、以下の成果が得られた。

①超曲面単純 K3 特異点のリンクの微分同相型の決定に取り組んでいたが、C. Boyer 氏と K. Galicki 氏 (2008 年) によって、リンクの実 5 次元多様体としての Sasakian 構造の観点から、リンクの微分同相型が決定されていることが明らかになった。証明には S. Smale 氏 (1962 年) のスピン実 5 次元多様体の分類結果と J. Kollár 氏 (2005 年) の実 5 次元ザイフェルト束の結果が使われている。研究代表者は異なる観点から、例外集合として現れる正規 K3 曲面の特異点をトーリック解消することにより別証明を与え、正規 K3 曲面の特異点構造とリンクの微分同相型が深く関係していることを明らかにした。また 95 個の超曲面単純 K3 特異点の位相型はすべて異なることを証明した。さらにリンクのホモロジー群とウエイトに関するオーリック予想に対する肯定的な部分的解決も得られた。(Atsuko Katanaga, The topological types of hypersurface simple K3 singularities, 投稿中)。

②非退化な斉次多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点の 95 個のクラスをリンクの微分同相型で分類すると、18 個のクラスしか現れない。さらに K3 曲面の性質から、現れる可能性がある実 5 次元多様体が、実は 95 個のクラスの中では現れていないことが①の研究から明らかになった。そこで、非退化な斉次多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点のリンクとして現れない実 5 次元多様体が、米村崇氏の 95 個のクラスに含まれない非退化な斉次多項式でない多項式で定義された超曲面単純 K3 特異点のリンクとして無限個構成することに成功した。(Atsuko Katanaga, The links specific to hypersurface simple

K3 singularities, The proceeding of the 6th Franco-Japanese Symposium on singularities, 査読あり, 掲載確定)

③ Andras Szucs 氏 (Eotvos Lorand University, Hungary), Andras Nemethi 氏 (Renyi Mathematical Institute, Hungary) との共同研究において、ある複素 3 次元超曲面孤立特異点の実 5 次元リンクの実 7 次元球面へのはめ込みについて、ある条件のもとで、正則ホモトピーに関する分類を行った。(Atsuko Katanaga, Andras Nemethi, Andras Szucs, Links of singularities up to regular homotopy, 投稿中)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

① Atsuko Katanaga, The links specific to hypersurface simple K3 singularities, The proceeding of the 6th Franco-Japanese Symposium on singularities, 査読あり, 掲載確定

[学会発表] (計 8 件)

① 片長敦子, Links of singularities up to regular homotopy, 特異点セミナー, 2013 年 3 月 12 日, 東京理科大学

② 片長敦子, Null Sasakian links in dimension 5, 信州トポロジーセミナー, 2012 年 7 月 11 日, 信州大学

③ 片長敦子, The topology of hypersurface simple K3 singularities, 特異点論と幾何構造, 2012 年 6 月 1 日, 長野市生涯学習センター

④ 片長敦子 (共同発表: 島田伊知朗), The resolutions of hypersurface simple K3 singularities, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012, 2012 年 3 月 8 日, Graduate School of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University

⑤ 片長敦子, The links specific to hypersurface simple K3 singularities, 国際シンポジウム「Singularities in Geometry and Topology – The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularities –」(招待講演), 2011 年 9 月 6 日, The Nishijin Plaza, Lecture Hall, Kyushu University

⑥ 片長敦子, The missing numbers related to hypersurface simple K3 Singularities, Seminar Geometrie (招待講演), 2011 年 5 月 6 日, Mathematisches Institut Universität Basel

⑦ 片長敦子, The numbers associated with

the links of hypersurface simple K3
Singularities, 談話会, 2010年11月16
日, 信州大学理学部

- ⑧ 片長 敦子, The links of simple K3
singularities defined by specific
non-quasi-homogeneous polynomials, 研
究集会「特異点と多様体の幾何学」, 2010
年9月17日, 山形大学理学部

6. 研究組織

(1) 研究代表者

片長 敦子 (KATANAGA ATSUKO)
信州大学・全学教育機構・講師
研究者番号：20373128

研究者番号：

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：