

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 24 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540063

研究課題名（和文）

無限次元多様体と帰納極限のトポロジー

研究課題名（英文）

Topology of Infinite-Dimensional Manifolds and Inductive Limits

研究代表者

酒井 克郎 (SAKAI KATSURO)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：50036084

研究成果の概要（和文）：

本研究期間中、 LF 多様体の理論、すなわち LF 空間と呼ばれる局所凸線形位相空間をモデルとした多様体の理論の構築を目指して、関連する諸問題を研究し多くの成果が上げたが、 LF 多様体の特徴付けに関しては Banach と Repovs に先を越されてしまった。また、無限次元トポロジーの若手研究者育成のために、単体複体のトポロジー、次元論、ANR 理論を学ぶための大学院生用教科書であり、研究者にとっても有用な参考文献になる書籍を完成させることができた。この書籍「Geometric Aspects of General Topology」の出版がシュプリンガー社により受理された。

研究成果の概要（英文）：

During this research period, in an effort to establish the theory of LF manifolds, i.e., manifolds modeled on locally convex topological linear spaces called LF spaces, we have studied related problems and obtained many results, but characterizing LF manifolds was scooped by Banach and Repovs. Besides, to cultivate young researchers in Infinite-Dimensional Topology, I could write up a book which is a textbook for graduate students to study topology of simplicial complexes, dimension theory, and ANR theory, or a useful reference for researchers. This book “Geometric Aspects of General Topology” is accepted to be published by Springer.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学

1. 研究開始当初の背景

ヒルベルト多様体やヒルベルト・キューブ多様体など距離付け可能な無限次元多様体に関しては、その特徴付けや分類定理など

が得られ、理論として既に確立されていたが、そのような多様体がどのように自然に現れるのか様々な研究が続けられていた。一方、フレッシュ空間、すなわち完備距離付け可能

局所凸線形位相空間の単調増加列の(局所凸)線形位相空間と線形連続写像のカテゴリーにおける帰納極限である LF 空間をモデルとした LF 多様体に関する研究に関しては、LF 空間の位相的分類は既に完成しており、ユークリッド空間の帰納極限と同相な LF 空間をモデルとする多様体の理論はほぼ完成していたが、それ以外の場合には、可分ヒルベルト空間の帰納極限と同相な LF 空間の開集合に関する分類定理などの証明が得られた程度であった。また、自然に現れる LF 多様体の例もいくらか知られるようになってきたという状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、LF 多様体の理論の構築を目指すと共に、自然に現れる無限次元多様体を調べ、無限次元多様体の理論の応用を探ることである。

研究代表者は、ここ四半世紀、無限次元トポロジーの若手研究者育成の必要性を感じており、20 年程前に独自のレクチャー・ノートを準備し、大学院の講義やセミナーで用い毎年加筆・改良を重ねて来たが、定年退官の時期が迫るにつれ若手研究者が育っていないことを今まで以上に実感するようになった。そのため、無限次元トポロジーの研究に必要なことを学べる教材や研究を進展させるために必要な情報を教科書または参考書として残す必要性を強く意識するようになった。レクチャー・ノート全体が出版できる程度にまで完成した訳ではないが、完成した前半部分だけでも出版すべきだとの考えから、本研究期間の後半には、その図書の出版も本研究の目的に加えることにした。

3. 研究の方法

無限次元トポロジーを専門に研究している国内の研究者は少人数なので、これまで共同研究を行ってきた 矢ヶ崎達彦、嶺幸太郎、山下温らと研究連絡を頻繁に取り合い、国外の研究者達ともメールなどを用いて情報の交換を行いながら、研究代表者の指導している大学院生たちとのディスカッションにより上記目的に沿って LF 多様体と自然に現れる無限次元多様体の研究を進めて来た。

当初は国外の研究者を招聘して、彼らと共同研究を行うことも考慮していたが、無限次元トポロジー若手研究者育成のために、図書の出版も目的に加えたため、外国人研究者招聘のための費用を出版のために必要な費用に振り替えることにした。レクチャー・ノートの前半部分を出版用に編集して、シュプリンガー・ジャパンに投稿したが、査読者たちの意見により再編集を求められ、出版が決定した。出版のためにネイティブによる英文校正が必要となり、校正者とのメールによる

やり取りで英文校正を行った。本研究期間の後半は出版のためにかなりの時間と労力を費やした。

4. 研究成果

まず、新たに加えられた目的である無限次元トポロジーの若手研究者育成のための図書の出版であるが、研究代表者のレクチャー・ノートの前半部分を単体複体のトポロジー、次元論、ANR 理論、および関連するトピックスを学ぶための大学院生用の教科書また研究者のための参考書として編集し直したが、シュプリンガー社の数学図書シリーズ Springer Monographs in Mathematics の 1 冊として、Geometric Aspects of General Topology というタイトルで出版されることになり、現在印刷中である。

この書籍は、普通の教科書で扱われていない以下の事柄が丁寧に扱われているので非常に有用である：距離空間 X に対して、次元公式 $\dim X \times I = \dim X + 1$ が成立すること、2 種類の帰納的次元 ind と Ind には差があること、0 次元以外の有限次元部分空間を含まない遺伝的無限次元空間が存在すること、可算次元局所可縮空間が ANR になること；コホモロジー次元が有限である無限次元空間が存在すること、定義域の次元より値域の次元が高くなる CE 写像が存在すること、AR でない距離付可能な線形位相空間の存在することなどである。また、この書籍の存在意義を非常に高めるものとして、最後の章において、次元論と ANR 理論が見事に絡み合っている話題が扱われている。

次元論と ANR 理論という 2 つの理論の研究において、単体複体は欠かすことの出来ない道具であるが、局所有限でない単体複体を扱った教科書は見当たらない。その中で、細分に関するホワイトヘッドの定理の証明や単体複体のホモトピー型を持つ空間についても丁寧に扱われているので、この点でも非常に有用である。

当初の主目的であった LF 多様体の特徴付けに関しては、本研究期間中に LF 多様体の特徴付けが Banach と Repovs によって与えられ先を越されてしまった。しかしながら、彼らの特徴付けは、まだ位相的特徴付けとは言い難いので、今後さらに研究を進める必要があると思われる。自然に現れる無限次元多様体に関しては、成果を上げることができ、関係する問題や関連分野における成果もあげることができた。以下、それらの成果について述べる。なお、雑誌論文・学会発表の番号は、「5. 主な発表論文等」におけるリストの番号である。

単体複体は本研究において重要な研究対象である。単体複体に関して、いくらか興味深い結果を得ることができた。まず、嶺と

の共同研究により、距離位相を持つ単体複体に関して、細分が距離位相を保存するためには、細分の頂点集合が疎であることが必要十分であることを、雑誌論文 8 で示すことができた。また、Henderson は単体複体の細分に関する Whitehead の定理が距離位相に関しても成立することを 1975 年に示したが、彼の証明には局所有限次元の条件が必要であり、上記の結果を用いて無条件でも有効な証明を雑誌論文 6 で与えることができた。

可分ヒルベルト空間 ℓ_2 の有限座標以外は 0 となる点全体からなる部分線形位相空間 ℓ_2^f は、典型的な可分 LF 空間であるユークリッド空間の帰納極限 \mathbb{R}^∞ の異なる位相付けと見なせる。両者は、可算無限充満複体の弱位相を持つ多面体と距離位相を持つ多面体と同じ同相写像で同相となっている。同様に、稠密度が $\tau > \aleph_0$ である非可分ヒルベルト空間 $\ell_2(\tau)$ の有限座標以外は 0 となる点全体からなる部分線形位相空間を $\ell_2^f(\tau)$ とすると、頂点の濃度が τ の無限充満複体の距離位相を持つ多面体と同相であると予想されたが、研究代表者の指導院生である越野克久が証明を与えた。それで、どんな線形位相空間が弱位相を持つ無限充満複体と同相になるのか興味深い問題となった。学会発表 5 では、このことに関連して、研究期間以前の研究成果も含め、研究代表者の研究を振り返るとともに今後の課題・問題提起を行った。

有限次元部分線形空間に関する弱位相を $\ell_2^f(\tau)$ に入れても線形位相空間にはならないが、 \mathbb{R} の箱積の部分空間としての位相(箱位相)を $\ell_2^f(\tau)$ に入れるならば局所凸線形位相空間になる。雑誌論文 9 において、研究代表者とその指導院生である楊寒彪との共同研究を行い、単体複体に箱位相に相当する位相を導入し、その位相に関する結果を得た。この位相は弱位相と距離位相の中間にあたり、単体複体はこの位相によって距離空間に対する ANE になることが分かったが、単体複体の位相としては非常に悪い性質を持つ位相であることも判明した。実際、重心細分はこの位相を保存しないし、この位相に関して連続とならない単体写像も存在する。位相構造を研究にも有用であろうと期待したが、その期待は裏切られた。

関数空間のコンパクト化に関する成果を上げることが出来た。無限個の点を含むコンパクト距離空間 X 上の実数値連続関数のなす空間はバナッハ空間でヒルベルト・キューブの擬内部と同相であるので、ヒルベルト・キューブと同相なコンパクト化を持つことが分かるが、それが自然なものとして得られるかが問題となる。以前、上原成功との共同研究により関数をそのグラフと同一視することにより、関数空間を X と数直線のエンド・コンパクト化の直積空間の冪空間に埋

め込み、そこでの閉包がその様なコンパクト化であることを示した。その後、小賀坂との共同研究により X がコンパクトでない場合にも結果を拡張することが出来、今年度はさらに数直線をより一般の 1 次元局所コンパクト AR の場合に拡張することに成功した。学会発表 11 において、この研究結果の報告を行った。

さらに、幾何的トポロジーにおいて非常に重要な Taylor の CE 写像があるが、雑誌論文 7 では、Taylor による構成とその証明の間違いを発見し、正しい証明を与えた。その他の雑誌論文 1~5 は当初出版予定であったが、本研究期間中に出版された論文である。

本研究期間中には、連携研究者もそれぞれ多くの成果を上げたが、それらに関しては省略する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者及び連携研究者には下線)
以下のリストにおいて、連携代表者に関しては、本研究に直接関わるものだけに限った。

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① Taras Banakh, Kotaro Mine, Katsuro Sakai, and Tatsuhiko Yagasaki, Spaces of continuous maps from non-compact spaces into topological groups with the Whitney topology, *Topology and its Applications* (査読有) Vol. 157 (2010), 1110-1117. Doi:10.1016/j.topol.2010.02.002
- ② Tatsuhiko Yagasaki, Groups of volume-preserving diffeomorphisms of non-compact manifolds and mass flow toward ends, *Transactions of American Mathematical Society* (査読有) Vol. 362 (2010), 5745-5770. Doi:10.1090/S0002-9947-2010-05101-3
- ③ Taras Banakh, Kotaro Mine, Katsuro Sakai, and Tatsuhiko Yagasaki, Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology, *Topology Proceedings* (査読有) Vol. 37 (2011), 61-93.
- ④ Kotaro Mine, Katsuro Sakai, Tatsuhiko Yagasaki, and Atsushi Yamashita, Topological type of the group of uniform homeomorphisms of the real line,

Topology and its Applications (査読有)
Vol. 158 (2011), 572-581.
Doi:10.1016/j.topol.2010.12.004

- ⑤ Kotaro Mine and Katsuro Sakai,
Simplicial complexes and open subsets
of non-separable LF-spaces,
Canadian Journal of Mathematics (査読
有) Vol. 63 (2011), 436-459.
Doi:10.4153/CJM-2010-083-5
- ⑥ Katsuro Sakai,
Small subdivision of simplicial
complexes with the metric topology,
Journal Mathematical Society of Japan
(査読有) 63 (2011), 789-800.
Doi:102969/jmsj/06330789
- ⑦ Katsuro Sakai,
Correcting Taylor's cell-like map,
Glasnik Matemats, Ser. III, (査読有)
Vol. 46 (2011), 483-487.
Doi:10.3336/gm.46.2.16
- ⑧ Kotaro Mine and Katsuro Sakai,
Subdivisions of simplicial complexes
preserving the metric topology,
Canadian Mathematical Bulletin (査読
有) Vol. 55 (2012), 152-163.
Doi:10.4153/CMB-2011-055-7
- ⑨ Katsuro Sakai and Hanbiao Yang,
The box topology of infinite
simplicial complexes,
Tsukuba Journal of Mathematics (査読
有) Vol. 36 (2012), 295-309.
<http://projcteuclid.org/euclid.tkbjm/1358777002>

[学会発表] (計 11 件)

- ① 矢ヶ崎 達彦, 酒井 克郎, 嶺 幸太郎,
Taras Banakh,
Homeomorphism and diffeomorphism
groups of non-compact manifolds with
Whitney topology,
日本数学会 2010 年度 秋季総合分科会,
2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学
- ② 嶺 幸太郎,
局所可縮な群への連続関数のなす空間,
日本数学会 2010 年度 秋季総合分科会,
2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学
- ③ 矢ヶ崎 達彦,
Groups of volume-preserving
diffeomorphisms of non-compact

manifolds and mass flow toward ends,
ホモトピー論シンポジウム, 2010 年 11
月 1 日, 九州大学西新プラザ.

- ④ 矢ヶ崎 達彦, Taras Banakh, 酒井 克郎,
嶺 幸太郎,
Homeomorphism groups of non-compact
surfaces with Whitney topology,
2010 年度 General Topology シンポジウ
ム, 2010 年 12 月 21 日, 筑波大学
- ⑤ 酒井 克郎,
Simplicial complexes and infinite-
dimensional manifolds,
日本数学会 2011 年度 全日本トポロジ
ー・シンポジウム (招待講演) 2011 年 8
月 24 日, 筑波大学
- ⑥ 矢ヶ崎 達彦,
Mapping class groups of non-compact
surfaces,
RIMS 研究集会: 一般及び幾何学的トポロ
ジーとその応用, 2011 年 10 月 17 日, 京
都大学数理解析研究所.
- ⑦ 矢ヶ崎 達彦,
Topological properties of
diffeomorphism groups of non-compact
manifolds,
第 47 回 位相空間論シンポジウム, 2012
年 6 月 2 日, 愛媛大学城北キャンパス.
- ⑧ 矢ヶ崎 達彦,
Whitney, uniform and compact-open
topologies on homeomorphism groups of
non-compact manifolds,
2012 年度 General Topology シンポジウ
ム, 2012 年 12 月 14 日, 神戸大学.
- ⑨ 嶺 幸太郎,
Topological type of open subsets of LF-
spaces,
葉層構造と微分同相群 2012 年研究集会,
2012 年 10 月 31 日, 東京大学玉原国際セ
ミナーハウス.
- ⑩ 矢ヶ崎 達彦,
Groups of uniform homeomorphisms of
covering spaces,
RIMS 研究集会: 変換群の幾何の展開,
2012 年 5 月 31 日, 京都大学数理解析研
究所.
- ⑪ 越野 克久, 酒井 克郎,
A Hilbert cube compactification of a
function space into a 1-dimensional
locally compact AR with the compact-

open topology,
日本数学会 2013 年度 年会, 2013 年 3 月
21 日, 京都大学.

[図書] (計 1 件)

- ① Katsuro Sakai,
Geometric Aspects of General Topology,
Springer Monograph of Mathematics,
Springer Verlag, 印刷中.

[その他]
ホームページ等

<http://sites.google.com/site/ksakaiidtopology/ri-ben-yunopeji>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 克郎 (SAKAI KATSURO)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号 : 50036084

(2) 連携研究者

矢ヶ崎 達彦 (YAGASAKI TASUHIKO)
京都工芸繊維大学
大学院工芸科学研究科・教授
研究者番号 : 401910077

嶺 幸太郎 (MINE KOTARO)
東京大学・大学院数理科学研究科
特別研究員
(横浜国立大学・理工学部・非常勤講師 ;
高崎経済大学・経済学部・非常勤講師)
研究者番号 : 90512525

川村 一宏 (KAWAMURA KAZUHIRO)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号 : 40204771

加藤 久男 (KATO HISAO)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号 : 70152733

石井 敦 (ISHII ATSUSHI)
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号 : 00531451

金戸 武司 (KANETO TAKESHI)
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号 : 70107340