

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 10 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010-2012

課題番号：22540065

研究課題名（和文）幾何学的トポロジーを用いたカオス力学系理論の研究

研究課題名（英文）Study of chaotic dynamical systems by use of geometric topology

研究代表者

加藤 久男（KATO HISAO）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70152733

研究成果の概要（和文）：本研究では、位相力学系的な発想から eventually coloring の概念を新たに導入し、colorings of maps の研究を革新的に発展させることに成功した。また、空間の距離の構造と box-dimension との関係を完全に決定する定理を得た。更に、ランダムな無限点列を可算個与えると、それを実現する力学系が測度保存力学系全体の中で稠密に存在していることを示した。エネルギー保存の力学系では任意の可算個の予言の列は、現在の状態をほんの少し変化させるだけで時間を追って実現可能であり、想定内想定外の概念はエネルギー保存の力学系では無意味であることを証明した。これらの結果は、幾何学的トポロジーと位相力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

研究成果の概要（英文）：We studied eventual colorings of maps. We obtained some important theorems of eventual coloring numbers. By use of Alexandroff-Urysohn metrization theorem we obtained very strong theorems concerning topological dimension and box-counting dimension. Also, we studied chaotic measure-preserving dynamical systems of compact manifolds. These results are very important in the theories of geometric topology and dynamical systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：colorings、カオス、エントロピー、拡大写像、連続体、非分解空間、フラクタル

研究開始当初の背景

研究代表者は、連続写像の位相力学的性質の研究を行っている。一般に、連続写像の力学

系は複雑なトポロジーを導くことが知られている。アトラクターをはじめとする不変集合は大変複雑な構造をなしている場合が多

く、そうした複雑なコンパクト距離空間の幾何学的構造はたいへん興味深い研究対象である。本研究テーマでは、相空間として一般のコンパクト距離空間を取り扱い、連続写像のカオス的な性質を位相的・エルゴートの的に考察していく。この場合、通常微分可能性を仮定した力学系理論とはかなり異なったものになる。現在、力学系において色々なカオス写像が考察されている。例えば、transitive, sensitive, chaos of Li-Yorke and Devaney, 正のエントロピーを持つ写像、拡大同相写像、連続体的同相写像などが代表的なものである。特に、拡大同相写像、連続体的拡大同相写像、正の位相エントロピーをもつ同相写像とそれを許容する空間の関係を研究することが重要になってきた。拡大的力学系とは、微少な観測値の相違が過去または未来のある時刻に明確な違いとなって現れる力学系のことで、位相力学系、エルゴート理論では特に重要な概念である。連続体的拡大同相写像の概念は、拡大同相写像とパイコね変換を一般化したものであり、研究代表者によって定義された。これまでの研究で、拡大同相写像の存在に関する一連の定理、カオス連続体の存在定理、平面内のカオス連続体の indecomposable 構造に関する定理などを証明した (Fund. Math. Trans. AMS. Topology Appl. Pacific J. Math. Canad. J. Math. 岩波数学辞典 (4 版) など)。Indecomposability は、general topology (連続体論) の中心的課題として Knaster, Kuratowski, Bing などによって研究されてきたが、近年、力学的複雑さが幾何学的な複雑となって現れる典型的な構造としてこの indecomposability が出現し、その重要性が認知されてきた (多くの場合、不安定集合と indecomposable 連続体の composant が一致する構造)。

### 1. 研究の目的

本研究では、相空間として一般のコンパクト距離空間を取り扱う。この場合、通常微分可能性を仮定した力学系理論とはかなり異なったものになる。本研究の目的は、トポロジーの主な研究対象である可分距離空間とその上の連続写像の力学的・幾何学的性質を、トポロジー、位相力学系理論およびエルゴート理論を駆使して総合的に研究し、カオス力学系に現れる複雑な不変集合の幾何学的構造を明らかにすることである。本研究の取り組むべき第一の課題は、トポロジーと位相力学系に関わる多くの問題のうちで、コンパクト距離空間の拡大的同相写像と核になる空間の indecomposability の関係を明らかにすることである。また、フラクタル集合上の一般的な写像の位相エントロピー評価、Menger 多様体上のカオス写像 (minimal homeomorphism, expansive homeomorphism... など) の存在問題も本研究課題で究明していきたい重要な問題である。また、normal sequence から導かれる距離と Hausdorff dimension との関係は、box-counting dimension と同様に密接に結びついていると予想された。しかし依然として未解決な問題である。本研究課題の目標の1つは、この問題に関して満足のいく解答を与えることである。

### 3. 研究の方法

トポロジー、位相力学系理論およびエルゴート理論を駆使して総合的に研究し、かつ得られた手法・結果を融合することで本研究を行った。第一の研究テーマは、連続写像のカオス的な性質を位相的・エルゴートの的に考察することであった。第2の研究テーマは、幾何学的トポロジーからの研究である。局所的に複雑な可分距離空間および連続写像の幾何学的構造について集中的な研究を行った。こ

のテーマと関連する重要な問題「4次元ユークリッド空間の cell-like decomposition space は有限次元か」の解明に向けた研究を行った。また、関係する専門家と研究協力・討論を行うため、積極的に関連する国内外の研究集会に出席し研究発表、討論、研究連絡を行なった。

#### 4. 研究成果

本研究では、連続写像の彩色問題を位相力学系との関連から集中的に研究した。この方面の研究では、古くは Lusternik-Schnirelman-Borsukによる次の定理が知られている： $n$ -次元球面上の任意の  $(n+1)$  個の閉集合からなる被覆には、antipodal points を含む閉集合が少なくとも1つ存在する。この定理は、その後 Erdos, Katetov, Frolic, Van Douwen らによって連続写像の彩色 (色付け, coloring) 問題として定式化され研究が続けられてきた。また、彩色数 (coloring number) と位相次元との関連の研究について、Arts, Fokkink, Vermeer, Buzyakova, Chigogidze などの優れた研究が知られている。研究代表者は、位相力学系的な発想から eventually coloring の概念を新たに導入し、この方面の研究を革新的に発展させる基本的定理を証明した (J. Math. Soc. Japan, Topology Proc. Topology Appl. で研究成果を発表)。例えば、2次元球面上の任意の連続写像に対しては、16 iteration (繰り返し) に対して彩色数は2となることがわかる。また、一般の  $n$ -次元位相力学系に関し、その周期点の集合の位相次元がゼロ次元以下であれば、その力学系をゼロ次元の力学系の  $2^n$  冪 fiber の semi-conjugate で表現できることを証明した (Topology Appl.)。また、空間の位相次元と box-counting dimension との関係をも最終的に決定する距離の構成に成功し、空間の距離の構成と box-dimension との関係をも完全に決定する定理を得た。ランダムな無限点列を可算個与えると、それを実現する力学系が測度保存力学系全体の中で稠密に存在していることを示した。つまり、エネルギー保存の力学系では任意の可算個の予言の列は、現在の状態をほんの少し変化させるだけで時間を追って実現可能であることを証明し、想定内・想定外の問題はエネルギー保存の力学系では無意味であることを証明した (確率論的にも)。これらの結果は、幾何学的トポロジーと位相力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

に決定する距離の構成に成功し、空間の距離の構成と box-dimension との関係をも完全に決定する定理を得た。ランダムな無限点列を可算個与えると、それを実現する力学系が測度保存力学系全体の中で稠密に存在していることを示した。つまり、エネルギー保存の力学系では任意の可算個の予言の列は、現在の状態をほんの少し変化させるだけで時間を追って実現可能であることを証明し、想定内・想定外の問題はエネルギー保存の力学系では無意味であることを証明した (確率論的にも)。これらの結果は、幾何学的トポロジーと位相力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- (1) Y. Ikegami, H. Kato and A. Ueda, On eventual coloring numbers, Topology Proceedings, 査読有, 受理済み.
- (2) H. Kato, Periodic points, compactifications and eventual colorings of maps, Topology Appl. 査読有, 160 (2013), 685-691.
- (3) Y. Ikegami, H. Kato and A. Ueda, Dynamical properties of finite-dimensional metric spaces and zero-dimensional covers, Topology and its Applications, 査読有, 160 (2013), 564-574.
- (4) Y. Ikegami, H. Kato and A. Ueda, Eventual colorings of homeomorphisms, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 65, No 2 (2013), 375-387.
- (5) H. Kato, Addendum to: Characterizations of topological dimension by use of normal Sequences of finite open covers and Pontrjagin-Shnirelmann' theorem, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 63 (2011), 977-983.
- (6) H. Kato and M. Matsumoto, Characterizations of topological dimension by use of normal Sequences of finite open covers and Pontrjagin-Shnirelmann' theorem, J. Math. Soc. Japan,

査読有, 63 (2011), 919-976.

(7) H. Kato,

Dynamical systems which realize given random bi-sequences of points on their orbits, *Topology and its Applications*, 査読有, 158 (2011), 1163-1171.

(8) H. Kato,

On indecomposability and composants of chaotic continua II, *Topology and its Applications*, 査読有, 158 (2011), 647-652.

(9) C. Fujita, H. Kato and M. Matsumoto, Fractal Metrics of Ruelle Expanding Maps and Expanding Ratios, *Topology and its Applications*, 査読有, 157 (2010), 615-628.

[学会発表] (計 7 件)

(1) 加藤久男,

Compactifications of a space and periodic points of maps, 2012 ジェネラルトポロジーシンポジウム、2012, 12月13日、神戸大学

(2) 加藤久男,

Zero-dimensional covers of dynamical systems, 南京大学大学での招待講演, 中国 9. 26, 2012.

(3) 加藤久男,

Eventual colorings of maps of separable metric spaces, International Conference on Topology and the Related Fields, 南京師範大学、中国 2012, 9. 24.

(4) 加藤久男,

Dynamical properties of homeomorphisms and zero-dimensional covers, 2011 ジェネラルトポロジーシンポジウム, 2011, 12月20日、埼玉大学.

(5) 加藤久男,

Colorings and eventual colorings, 一般位及び幾何学的トポロジーとその応用, 京都大学数理解析研究所研究集会 (2011), 10月19日.

(6) 加藤久男,

距離の構成による色々な次元, 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用, 京都大学数理解析研究所研究集会 (2010), 10月13日.

(7) 加藤久男,

Characterizations of topological dimension by use of normal Sequences of finite open covers and Pontrjagin-Shnirelmann' theorem, Jamex (日本-メキシコトポロジー国際会議), University of Colima, Mexico (2010, 9月28日).

## 6. 研究組織

研究代表者

加藤 久男 (KATO HISAO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号 : 70152733

