様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　１６　日現在

機関番号：　１２５０１
研究種目：　基盤研究(C)
研究期間：　2010～2014
課題番号：　２２５４００６８

研究課題名（和文）非アーベル的な位相的捩れと岩澤多項式の精密化

研究課題名（英文）The non-abelian topological torsion and the Iwasawa polynomial

研究代表者

杉山　健一（SUGIYAMA, Ken-ichi）

千葉大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２０６４４１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：３次元球面内の結び目の補空間の幾何学的構造は、その基本群により決定され、その群は結び目群と呼ばれる。特に、補空間が体積有限の双曲構造を有するとき、結び目群はクライン群と呼ばれ、２行２列の複素特殊線型群の離散部分となり、幾何学的あるいは整数論的における重要な研究対象である。本研究では、結び目を平面に投影して表して、交叉を一カ所入れ替えたときの結び目群の変化と、補空間が双曲構造を持つときその双曲構造の変化を調べた。また、Alexander多項式と合同ゼータ関数の類似を追求した。

研究成果の概要（英文）：The geometric structure of the complement of a knot in the three dimensional sphere is determined by its fundamental group. The group is called the knot group. If the complement admits a complete hyperbolic structure of finite volume the knot group is nothing but the Kleinian group which is a discrete subgroup of the 2×2 special linear group. It is an important object both in geometry and in number theory. Our research is to investigate how the knot group changes if one alters a crossing of a knot. If moreover the complement admits a complete hyperbolic metric of finite volume we have also studied the change of the hyperbolic structure. We also study a similarity between the Alexander polynomial and the Hasse-Weil congruent zeta function.

研究分野：　幾何学

キーワード：　結び目群　双曲結び目　３次元双曲多様体

１． 研究開始当初の背景

３次元位相多様体 X の基本群を G で表すことにする。G から、無限巡回群 Z への全射準同型 p が存在するとき、Z の生成元 g はその写像の核 K のアーベル化 H に作用するが、その特性多項式が Alexander 多項式であった。また、X が３次元球面から結び目を除いて得られる多様体であるとき、G から２行２列の特殊線型群への準同型を、結び目のペリフェラル群に制限した集合は、P 内の代数曲線となる。ここで P は１次元複素平面から原点を除いた空間（穴あき複素平面）の二つの直積であり、この曲線の定義多項式は A 多項式と呼ばれる。一方、結び目に対して、量子不変量と呼ばれる、変数を q とする有理多項式が定義される。研究開始の時点では、Alexander 多項式の精密化を定式化し、それと量子不変量の関係を明らかにすること、あるいは A 多項式と量子不変量はどう関わり合うかを明確にすることが問題とされていた（後者は予想として定式化され、AJ 予想と呼ばれている）。また、幾何学的数論における３次元多様体の理論と整数論の間の辞書によれば、G から Z への全射準同型は、有限体 F 上定義された射影代数曲線 C の算術的基本群から F の絶対ガロア群への準同型に対応し、g をフロベニウス写像と読み替えることにより、Alexander 多項式は C の Hasse-Weil 合同ゼータ関数に対応する。Alexander 多項式は、以下のように求められる。まず結び目を平面図に表し、結び目群の Wirtinger 表示を求める。結び目を平面図に表したときの連結成分の個数を n とすると、Wirtinger 表示は、結び目群を n 個の生成元と(n-1)個の関係式で表す。この(n-1)個の関係式から、Fox による自由微分と Z への全射準同型 p を用いて Alexander 行列と呼ばれる n ×(n-1)行列を構成されるが、その(n-1)次小行列式の定めるイデアルの生成元が Alexander 多項式である。Alexander 多項式は、X あるいは結び目の幾何学を反映することは良く知られている。前述の辞書に依れば、整数論において対応する Hasse-Weil 合同ゼータ関数にも同様のことが期待される。しかし、C の算術幾何学的性質が Hasse-Weil 合同ゼータ関数にどのように反映されるのか、また Hasse-Weil 合同ゼータ関数を組み合わせ論的な手法で求めることが可能であるのかが不明であった。

２．研究の目的

1. で説明した研究開始当初の状況に鑑み、箇条書きで述べる。以下、1.における記号を用いる。

(1) Alexander 多項式の精密化について
古典的な Alexander 多項式は、X の基本群 G から無限巡回群 Z への全射準同型が存在するときに定義された。本研究では、G から（可換群とは限らない）群 H に全射準同型が存在する場合に定義を拡張し、その性質を調べることを目的とした。

(2) A 多項式と量子不変量の関係
３次元多様体Ｘの基本群から２行２列の特殊線型群への表現のモデュライ空間Ｍの座標環 R は、不変式論によれば、基本群の表現の指標たちで生成されることがわかる。このことから、R はＸに含まれる閉曲線のホモトピー類を生成元とし、skein 関係式を q=1 で特殊化した関係式で定義される可換環と同型となることが導かれる。この事実から、閉曲線のホモトピー類すべてを集めた集合に、skein 関係式により関係を定めた非可換環は、R の q 変形となり座標環 R の量子変形と呼ばれる（以下、これを量子座標環と呼ぶことにする）。特に X をアニュラスと円の直積とすると、その量子座標環は非可換トーラスとなることが知られている。いま３次元球面に含まれる結び目 K の管状近傍を除いた空間を X とすると、X の境界はトーラスとなるので、X の量子座標環は非可換トーラスが作用するアーベル群となるが、我々の目的はその定義イデアル（このイデアルは非可換トーラスのイデアルである）を q=1 で特殊化して得られる２変数多項式環のイデアルと、X の A 多項式から生成される単項イデアルを比較することである。

(3) Hasse-Weil 合同ゼータ関数と Alexander 多項式の類似性
すでに研究の背景で説明したように、３次元球面に含まれる結び目 K の Alexander 多項式は組み合わせ的な手法で求められ、結び目の補空間の幾何学的性質を反映する。これに対して、有限体 F 上定義された種数 g の代数曲線の Hasse-Weil 合同ゼータ関数を明示的に求めるには、フロベニウス写像の固有値を求めなければならない。これは、エタールコホモロジー論における Grothendieck と Lefshetz の固定点定理を用いて求めることができるが、そのためには F の g 次拡大までの有理点の個数を求めなければならない。我々は、Hasse-Weil 合同ゼータ関数が、より組み合わせ論的な手法で求められる代数曲線の例を見つけることを目的とした。さらに、どのような代数曲線について、Hasse-Weil 合同ゼータ関数がその曲線の数論幾何的性質を良く反映するかを調べること目標に掲げた。

３．研究の方法

「研究の目的」の番号にしたがって、箇条書きで説明する。

(1) Alexander 多項式の精密化について
３次元球面内の結び目の Alexander 多項式

は、以下のように計算される。まず、補空間の基本群の Wirtinger 表示を求め、その関係式の表現行列を R とする。Fox の自由微分を用いて、R の非可換ヤコビ行列を求め、結び目群から無限巡回群への標準的な全射準同型から誘導される群環の準同型を用いて、R をローラン多項式係数の行列に変換すると、その小行列式の最大公約式が Alexander 多項式である。以上の行程で、我々は、結び目群の群環から無限巡回群の群環（ローラン多項式環）への準同型を任意の非可換環への準同型に変え、行列式を取る操作を A の Whitehead 群の元を取る操作に置き換えた。したがって、A の特殊 Whitehead 群が自明と仮定すると、A の単数、a_1 ,..., a_n が得られるが、これらにより生成される A の左イデアルを結び目の非可換 Alexander 不変量と定義した。

⑵ A 多項式と量子不変量の関係

交叉の入れ替えにより、結び目は自明な結び目となるが、自明な結び目に対しては量子不変量と A 多項式の関係は明らかである。したがって、我々は交叉の入れ替えで、補空間の量子座標環が非可換トーラス上の加群として、変化する様子を調べた。

⑶ Hasse-Weil 合同ゼータ関数と Alexander 多項式の類似性

Hasse-Weil 合同ゼータ関数がその構造を決定する有限体上定義された代数曲線を構成するために、ヤコビ多様体が虚数乗法をもつ有理数体上定義された代数曲線を、適当な素数 p で還元することを考えた。また、Hasse-Weil 合同ゼータ関数が、より組み合わせ論的な手法で求められる代数曲線の例を構成するために、以下のような考察を行った。一般に、３次元多様体の基本群は、有限階数の自由群を適当な関係式で割って得られる。ここで、関係式を忘れると有限階数の自由群が得られるが、これは有限グラフの基本群となる。我々は、Hasse-Weil 合同ゼータ関数が、適当なグラフのゼータ関数と密接に関係する代数曲線の構成を試みた。ここで、グラフのゼータ関数は、組み合わせ論的な手法で求められるため、このような曲線は求めていた曲線の候補となる。

４．　　研究成果

「研究の方法」の番号にしたがって、箇条書きで説明する。

⑴ Alexander 多項式の精密化について

環 A を取り替えると、Alexander 不変量の様々な精密化が得られることが分かった。例えば、A を無限巡回群の群環とする。このとき、自由群から無限巡回群への自然な準同型が存在するが、これによる自由群環から A への写像 f とすると、非可換 Alexander 不変量の f による像は、通常の Alexander 多項式となる。また、結び目群の線型群への表現をとると、それにより、自由群から線型群への写像が得られる。これにより、自由群環から行列環への準同型が得られるが、この準同型による非可換 Alexander 不変量の像は捩れ Alexander 不変量となる。この方法を少し変形すれば、捩れ Alexander 多項式も同様に得られる。さらに、A を結び目群の普遍表現の座標関数環とすると、結び目群の普遍表現により、自由群環から A を係数とする行列環への準同型が得られるが、この写像による非可換 Alexander 不変量の像は最も普遍的な Alexander 不変量となる。このように、我々が定義した非可換 Alexander 不変量は、すべての Alexander 不変量を関手的に扱うことを可能にすると期待されるが、現在これらの考えを論文にまとめている。

⑵　A 多項式と量子不変量の関係

結び目群の Wirtinger 表示を用いれば、交叉の前後で結び目群の変化の様子を明示的に表すことができる。これを用いて、量子座標環の変化を、生成元と関係式の変化で表すことができた。現在この結果に基づき、A 多項式の変化と量子座標環の変化を比較中である。

⑶ Hasse-Weil 合同ゼータ関数 Alexander 多項式の類似性

Hasse-Weil 合同ゼータ関数がその構造を決定する有限体上定義された代数曲線を構成するために、ヤコビ多様体が虚数乗法をもつ有理数体上定義された代数曲線を考え、還元する素数 p の特徴づけを試みた。それをまとめたのが「主な発表論文等」の「雑誌論文」、あるいは「学会発表」に記載した記事である。結果を簡単に述べると、p の虚数乗法の整数環における分解の様子で特徴付けられる。また、Hasse-Weil 合同ゼータ関数が、適当なグラフのゼータ関数と密接に関係する代数曲線の構成については、素数をレベルにもつモデュラー曲線の適当な素数での還元を考え、その Hasse-Weil 合同ゼータ関数を、保型形式論を用いて、適当なラマヌジャングラフのゼータ関数と関係づけることに成功した。現在これらの結果を、レベルを合成数に一般化したのち、論文としてまとめることを計画している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

Ken-ichi Sugiyama, On a generalization of Deuring's results, Finite fields and their applications, 26C,2014,69-85 （査読有り）

〔学会発表〕（計　２件）

１．杉山健一、整数の分割とMock Theta Functions，第３１回代数論的組合せ論シンポジウム、東北大学方平さくらホール（宮城県仙台市)、２０１４年6月１９日-２０日

２．Ken-ichi Sugiyama, On a generalization of Deuring’s results, Low dimensional topology and number theory VI，福岡ソフトリサーチパークセンター（福岡県福岡市)、２０１４年　3月１８日-２１日）

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
杉山 健一(SUGIYAMA, Ken-ichi)
千葉大学・理学研究科・教授
研究者番号：90206441

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：