

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540069

研究課題名（和文） 体積予想とその一般化

研究課題名（英文） Volume Conjecture and its generalizations

研究代表者

村上 斉（MURAKAMI HITOSHI）

東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：70192771

研究成果の概要（和文）：

体積予想とは、結び目の色付き Jones 多項式の漸近挙動を調べることにより、その結び目の補空間の体積が求められるであろうというもので、R. Kashaev, 村上順および研究代表者により提唱された。現在ではこの予想は様々な方向に一般化され、物理学者も含む多くの研究者に注目されている。本研究では、この予想の一部を解決するとともに、予想のさらなる一般化およびその一部の解決を行なった。

研究成果の概要（英文）：

The volume conjecture states that by studying a certain asymptotic behavior of the colored Jones polynomial of a knot would tell us the volume of the knot complement. It was proposed by R. Kashaev, J. Murakami and the main investigator. Now the conjecture is generalized to various ways and attracts many researchers including theoretical physicists. In this research we solve part of the conjecture, give yet more generalizations, and solve part of these generalizations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			0
年度			0
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何，結び目，体積予想，Jones 多項式，色付き Jones 多項式，体積，Chern-Simons 不変量，Reidemeister torsion

 1. 研究開始当初の背景
 体積予想は R. Kashaev により 1997 年に提唱

 されたものである。村上順と研究代表者は、
 2001年にそれを、色付き Jones 多項式という、

いわゆる量子不変量の形で書き改めた。これにより、パラメータの取り方が増え様々な拡張が考えられるようになった。また、色付き Jones 多項式は、物理学者 E. Witten により、経路積分という（数学的には厳密に定義されていない）方法を用いて、直感的で簡明な定義が与えられている。そのため理論物理学者もこの予想に興味を持ち、様々な物理的手法を用いて予想の拡張が提唱されてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、体積予想とその一般化を解決すべく研究を行なうことである。特に、結び目補空間の基本群の2次複素特殊線型群への表現に付随した位相的な量（体積、Chern-Simons不変量、Reidemeister torsionなど）が、色付き Jones 多項式の漸近挙動に現れるであろうという予想の解決に向けて研究を進める。

3. 研究の方法

最も重要で困難なものは、結び目の色付き Jones 多項式の漸近挙動を計算することである。計算量が膨大であるため、計算機を使っても近似計算がせいぜいである。多くの手法を試すことで厳密な漸近展開を求める。

また、求めた漸近展開の係数がどのような位相的意味を持つかも重要である。結び目の基本群からリー群 $SL(2;C)$ への表現に付随した Chern-Simons 不変量や Reidemeister torsion, あるいはそれらを定義する指標多様体の計算も行なう。

4. 研究成果

体積予想とは、結び目のN次元色付き Jones 多項式のパラメータに、1のN乗根を代入し、Nが大きいきの漸近挙動を調べると、その結び目の補空間の体積が得られるであろうというものである。この予想を証明する試みとともに、様々な拡張が試みられてきた。

以下、結び目が双曲的な場合、トーラス結び目の場合、非圧縮トーラスを含む場合に分けて説明する（結び目はこれら3種類に限ることが知られている）。

- (1) 双曲結び目の場合：拡張の一つとして漸近展開の主要項にChern-Simons不変量（結び目補空間の基本群からリー群 $SL(2, C)$ への表現に付随したものであり、体積の複素化とみなせる）と Reidemeister torsionが現れるのではないかとこの予想を提唱した。これは、8の字結び目と呼ばれる簡単な双曲結び目に

ついでに精密な計算により証明された定理をもとにしたものである。この結果は、色付き Jones 多項式のパラメータに1のN乗根を代入したものだけではなく、 $\exp((2\pi i+u)/N)$ を代入したときにも成立するものであり（uは絶対値が小さな実数）、AndersenとHansenにより知られていた式を拡張したものになっている。さらに、ここに現れた変数uが、結び目補空間の基本群から、リー群 $SL(2, C)$ への既約表現に対応しており、漸近展開に現れる Chern-Simons不変量と Reidemeister torsionは、この既約表現に対して定義されるものである。

この結果は、体積予想に関連して物理学者のGukovやDimofteたちが提唱してきたものと対応しており、数学的に厳密な考察は重要である。

- (2) トーラス結び目の場合：トーラス結び目は、たがいに素な整数(a, b)を用いて表される。(a, b)型トーラス結び目の補空間から $SL(2;C)$ への表現空間（厳密には指標多様体）は $(a-1)(b-1)/2$ 個の既約表現からなる成分と、1個の可換表現からなる成分を持つ。これらの結び目の色付き Jones 多項式の漸近挙動を計算しそれが、上記の各連結成分に対応した項の和に分かれることを示した。さらに、各項には、(1)と同様に、その項に対応した表現の Chern-Simons不変量と Reidemeister torsionが現れることも確かめた。
- (3) 非圧縮トーラスを含む場合：補空間に非圧縮トーラスを含む結び目の場合は、表現が複雑になるため色付き Jones 多項式の漸近挙動にもそれぞれの表現に対応した不変量が現れると予想される。もっとも簡単な場合として、トーラス結び目のケーブルの色付き Jones 多項式の漸近挙動を求め、上述の予想を裏付ける結果を得た。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計10件）

- ① Hitoshi Murakami: The coloured Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot, J. Topology, 6, 2013, 193-216 (査読有). DOI: 10.1112/jtopol/jts036

- ② Tohru Eguchi and Kazuhiro Hikami: Twisted elliptic genus for K3 and Borchers product, Lett. Math. Phys. 102 (2012), no. 2, 203-222 (査読有) .
- ③ Tohru Eguchi and Kazuhiro Hikami: N=2 moonshine. Phys. Lett. B 717 (2012), no. 1-3, 266-273 (査読有) .
- ④ Kazuhiro Hikami and Hitoshi Murakami: Representations and the colored Jones polynomial of a torus knot. Chern-Simons gauge theory: 20 years after, 153-171, AMS/IP Stud. Adv. Math., 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011 (査読有) .
- ⑤ Kazuhiro Hikami: Decomposition of Witten-Reshetikhin-Turaev invariant: linking pairing and modular forms. Chern-Simons gauge theory: 20 years after, 131-151, AMS/IP Stud. Adv. Math., 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011 (査読有) .
- ⑥ Kathrin Bringmann, Kazuhiro Hikami, and Jeremy Lovejoy: On the modularity of the unified WRT invariants of certain Seifert manifolds. Adv. in Appl. Math. 46 (2011), no. 1-4, 86--93 (査読有) .
- ⑦ Hitoshi Murakami: An introduction to the volume conjecture. Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory, 1-40, Contemp. Math., 541, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011 (査読有) .
- ⑧ Tohru Eguchi and Kazuhiro Hikami: N=2 Superconformal algebras and the entropy of Calabi-Yau manifolds, Lett. Math. Phys. 92 (2010), no. 3, 269-297 (査読有) .
- ⑨ Tohru Eguchi and Kazuhiro Hikami: N=4 superconformal algebra and the entropy of hyperKähler manifolds. J. High Energy Phys. 2010, no. 2, 19-46 (査読有) .
- ⑩ 村上 斉: 体積予想の現状, 数学, 62 巻, 2010, 502-523 (査読有).

[学会発表] (計 13 件)

- ① Kazuhiro Hikami: On the Complex Volume of Knots, Bethe Ansatz, quantum groups and beyond, 2013年3月9日,
- ② Hitoshi Murakami: The volume conjecture and its generalizations, Colloquium 2013年2月27日, University of Paris 7, Paris, France.
- ③ Kazuhiro Hikami: Cluster algebra and complex volume of 2-bridge knots, Facets of integrability: random patterns, stochastic processes, hydrodynamics, gauge theories and condensed matter systems, 2013年1月25日, Simons Center for Geometry and Physics, USA.
- ④ Hitoshi Murakami: Volume conjecture, MPI-Oberseminar, 2012年9月6日, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany.
- ⑤ Hitoshi Murakami: The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a knot, Conference 'New Perspectives in Topological Field Theories' 2012年8月31日, Center for Mathematical Physics, Hamburg, Germany.
- ⑥ Kazuhiro Hikami: Decomposition of elliptic genera in terms of superconformal characters, Low-Dimensional Topology and Number Theory, 2012年8月31日, Mathematical Research Institute of Oberwolfach, Germany.
- ⑦ Kazuhiro Hikami: Superconformal algebra, mock theta functions, and moonshine, Hypergeometric Series and Their Generalizations in Algebra, Geometry, Number Theory and Physics, 2012年5月29日, Institut Henri Poincare, France.
- ⑧ Kazuhiro Hikami: Moonshine from Character Decompositions of Elliptic Genera, Workshop on Modular Forms, 2012年5月7日, Kyushu University.
- ⑨ Hitoshi Murakami: The colored

Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a knot, Spring School in Geometry and Quantum Topology, 2011年3月25日, Les Diablerets, Switzerland.

- ⑩ Kazuhiro Hikami: Superconformal algebra, mock theta function, and Mathieu moonshine, Workshop "Low dimensional topology and number theory III", 2011年3月15日, 九州大学西新プラザ.
- ⑪ Hitoshi Murakami: The colored Jones polynomial of a knot and representations of its fundamental group, Workshop 'Low-Dimensional Topology and Number Theory', 2010年8月20日, Mathematical Research Institute of Oberwolfach, Germany.
- ⑫ Kazuhiro Hikami: Asymptotics of Quantum Invariants, Workshop 'Low-Dimensional Topology and Number Theory', 2010年8月19日, Mathematical Research Institute of Oberwolfach, Germany.
- ⑬ Kazuhiro Hikami: Superconformal Algebras and the Entropy of HyperKahler Manifolds, Workshop "Prospects in q-series and modular forms", 2010年7月14日, University College Dublin, Ireland.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 斉 (MURAKAMI, HITOSHI)
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号 : 70192771

(2) 研究分担者

樋上 和弘 (HIKAMI, KAZUHIRO)
九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授
研究者番号 : 60262151

(3) 連携研究者

なし