

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010 ~ 2012

課題番号：22540077

研究課題名（和文）

非可換多様体上の指数定理

研究課題名（英文） A generalization of the Atiyah-Singer Index Theorem on Noncommutative manifolds

研究代表者

森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00239708

研究成果の概要（和文）：

本研究の目的は 1)非可換幾何学の枠組に合致するような指数定理の拡張と 2) 非可換化された指数定理を用いて幾何学や弦理論の具体的研究に資すること；にある。これらに関して以下のような結果を得た。第 1 に Atiyah-Patodi-Singer 定理を高次元の葉を持つ境界付葉層多様体に拡張し、葉層の二次特性類である Godbillon-Vey 類が関与する指数定理を導いた (P. Piazza との共同研究)。第 2 に非可換幾何学の枠組を用いて Godbillon-Vey 類の定義域 (葉層構造の微分可能性) を拡張し、坪井俊 (東京大学) による Area cocycle との関連性を新たに見出した。第 3 に奇数次元の族指数定理と Gerbe の特性類である Dixmier-Douady 類との関連性を導き、さらに Godbillon-Vey 類との結びつきを明らかにすることができた。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of the present research are; 1) to find an extension of the Atiyah-Singer index theorem in the framework of Noncommutative Geometry; 2) to apply such a noncommutative index theorem to Geometry and String theory. Achieving the present research we obtained finally the following results. First we extended the classical Atiyah-Patodi-Singer index theorem to foliated manifolds with boundary of higher dimensional leaves and obtained an index theorem involved with the Godbillon-Vey class (a joint work with P. Piazza). Second, by exploiting the framework of Noncommutative Geometry, we extended the domain of the Godbillon-Vey class (differentiability of foliations), and related our cocycle to the area cocycle defined by T. Tsuboi. Third, we clarified relationship among the family index theorem of odd dimension, the Dixmier-Douady class (a characteristic class of gerbe) and the Godbillon-Vey class.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：指数定理、非可換幾何学、K理論、エータ不変量、葉層多様体、Godbillon-Vey類、巡回コホモロジー

### 1. 研究開始当初の背景

「非可換幾何学」とは、1980年代後半に A. Connes により提唱された幾何学の新しい枠組である。この枠組は微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学にまたがる広い分野に大きな刺激を与えており、さらに素粒子論においてもその応用が活発に研究されている。この非可換幾何学の中核を占める研究対象の一つに「Atiyah-Singer 指数定理」がある。この定理は、多様体の幾何不変量と解析不変量の深い関連性を導く美しい定理であり、さらに性質の全く異なる二つの不変量を結びつけている点で著しく有用性が高い。近年では弦理論・ゲージ理論からの着想と指数定理を結びつけ、3・4次元多様体に関する注目すべき結果も得られており、幾何学における指数定理の重要性は飛躍的に高まりつつある。そして Connes が非可換幾何学を提唱した動機のひとつに「指数定理の非可換化」という目標があったと推察して、間違いではあるまい。実際、彼はK理論・巡回コホモロジー群などの新手法を非可換幾何学に導入して、葉層多様体など従来の幾何手法では扱い難かった対象へ指数定理を拡張した。しかしこの方向への研究は大半が一般論に留っており、幾何学や素粒子論が扱う多様な対象に即した詳細な研究は、国内外においても未だ数少ない。非可換幾何学に関して、幾何学から素粒子論にわたる分野に革新的展開をもたらす潜在能力に疑問の余地はないものの、その将来性と実効性を確かめるためには、具体例に即した精緻な検証が不可欠と考えられた。

実際、Connes はK理論・巡回コホモロジー群などの新規な手法を非可換幾何学に導入して、葉層多様体・エルゴード的群作用を許す多様体・非コンパクト等質空間などに対して指数定理の拡張を行った。しかしこの方向への研究は大半が一般論に留っており、幾何学が扱う豊富な対象に即した詳細な研究は、国内外においても未だ数少ない。その中で本研究者は、指数定理の一般化に強い関心を抱き、この対象を幾何として具体化することを希求し、これまで①葉層多様体上で葉層構造の二次特性類が関与する指数定理；

② Maslov 類などのシンプレクティック幾何における特性類と指数定理の関連性；③スペクトル流・エータ不変量などの解析的二次不変量が現れる指数定理；などの研究を行ってきた。これらは、Connes が提唱する非可換幾何学の枠組を具象化する試みであった

と考えられる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は 1)非可換幾何学の枠組に合致するような指数定理の拡張と 2) 非可換化された指数定理を用いて幾何学や弦理論の具体的研究に資すること；にある。とくに a) 葉層多様体・力学系・エルゴード的群作用から派生する作用素環と関わる指数定理の解明； b) シンプレクティック幾何から生ずる非可換性・量子性と指数定理の関連性を明確化； c) スペクトル不変量（エータ不変量等）が関与する指数定理の精密化； d) コサイクルで扱った  $C^*$  群環や Grebe が関与する Twisted Index Theorem の展開と応用； e) 境界付多様体などに生じる非可換性と関わる指数定理の確立；を短期目標とした。

### 3. 研究の方法

本研究組織は研究代表者1名と連携研究者6名および海外研究協力者1名(P. Piazza, ローマ大学)の計8名で構成された。そして指数定理の理論面と応用面に関わる2つのグループを構成し、各々の連携研究者・研究協力者が担当分野を中心に、以下のような段階を経て「指数定理の再構築」および「非可換多様体への応用」を推進した。

①予備段階として本研究課題の周辺分野における基礎知識の充足を図る。そのため本研究目的に関連する研究集会へ積極的に参加し、また個別に専門家との密接な研究連絡を行う。

②研究の本段階、すなわち指数定理の再構築および「非可換多様体への応用」に関する研究においては、多くの専門家を交えた包括的研究連絡あるいは密度の高い研究集会の開催を行う。このような機会を経て研究成果の最終的完成をはかり、同時に応用面での妥当性を検証する。

本研究は、ほぼ以上の計画に基づいて実施された。まず初年度には本研究目的の周辺分野における基礎知識の充足を図った。そのため関連する主題の研究集会へ積極的に参加して専門家と討論を行った。加えて次年度以降は、多くの専門家との研究連絡を個別に行った。このために国内旅費・外国旅費・謝金等の経費を使用した。また非可換幾何学が関与する指数定理の拡張については、専門家を交えた密接な研究連絡やレビューを行った。また必要となる文献を整備し、指数的理の研

究に資する環境を整備した。資料整理にはノートパソコンとその関連機器を拡張した。

#### 4. 研究成果

第1に **Atiyah-Patodi-Singer** 定理を高次元の葉を持つ境界付葉層多様体に拡張し、葉層の二次特性類である **Godbillon-Vey** 類が関与する指数定理を導いた (P. Piazza との共同研究)。第2に非可換幾何学の枠組を用いて **Godbillon-Vey** 類の定義域 (葉層構造の微分可能性) を拡張し、坪井俊 (東京大学) による **Area cocycle** との関連性を新たに見出した。第3に奇数次元の族指数定理と **Gerbe** の特性類である **Dixmier-Douady** 類との関連性を導き、さらに **Godbillon-Vey** 類との結びつきを明らかにすることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① H. Moriyoshi and P. Piazza, Eta cocycles, relative pairings and the Godbillon-Vey index theorem, *Geom. Funct. Anal.*, 22 (2012), 1708--1813  
DOI 10.1007/s00039-012-0197-0 査読有

② H. Moriyoshi, A de Rham cohomology with integer coefficients and its application, in *Geometry and Something*; Fukuoka, (2011). 査読無

③ H. Moriyoshi and P. Piazza, Relative pairings and the Atiyah-Patodi-Singer index formula for the Godbillon-Vey cocycle, in *Noncommutative Geometry and Global Analysis*, (Ed. Connes, Gorokhovsky, Lesch, Pflaum and Rangipour), *Contemporary Mathematics* 546(2011), A.M.S. 225-247 査読有

④ H. Moriyoshi, The Chern-Weil theory on classifying spaces, in *Geometry and Something*; Fukuoka, (2010) 29--31. 査読無

[学会発表] (計10件)

① 森吉 仁志, Twisted Riemann-Roch theorem on K-aspherical manifolds,

“The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan”, Northwest University, Xi'an, China, September 7, 2010.

② 森吉 仁志

Eta cocycle and relative index theorem, *Perspectives in Deformation Quantization and Noncommutative Geometry*, RIMS Kyoto University, Kyoto, Japan, February 22, 2011.

③ 森吉 仁志

Eta cocycles and the Godbillon-Vey index theorem, *Analysis and Topology in Interaction 2011*, June 10, 2011, Cortona, Italy.

④ 森吉 仁志

Toeplitz operators, the index theorem and Connes' quantum calculus, *The 4th International School and Conference on Geometry and Quantization*, September 7, 8 and 9, 2011 Chinese Academy of Sciences, Beijing, China.

⑤ 森吉 仁志

The Godbillon-Vey invariant and Hilbert transform, “Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011”, 東京大学玉原セミナーハウス, 2011年10月31日

⑥ 森吉 仁志

整係数ド・ラームコホモロジー群とその応用、福岡微分幾何研究会 “Geometry and Everything”, 福岡大学 2011年11月6日

⑦ 森吉 仁志

Eta cocycles and the Godbillon-Vey index theorem, “Noncommutative Geometry”, Franco-Chinese Summer Mathematical Science Research Institute CNRS/NSFC, Fudan University, Shanghai, China, July 26, 2012

⑧ 森吉 仁志

Bott-Thurston-Tsuboi versus Dixmier-Douady, “葉層構造と微分同相群 2012 (Foliations and Diffeomorphisms Groups 2012)”, 東京大学玉原セミナーハウス, 2012年10月30日

⑨ 森吉 仁志

Godbillon-Vey invariants and Dixmier-Douady classes, Joint seminar FNRS-JSPS, Louvain-la-Neuve, Belgium, November 15, 2012

⑩ 森吉 仁志

Godbillon-Vey invariants and Dixmier-Douady classes, “Baumfest”, Australian National University, Canberra, Australia, December 14, 2012

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：00239708

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：40101076

宮崎 直哉 (MIYAZAKI NAOYA)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号：50315826

加藤 毅 (KATO TSUYOSHI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：40101076

夏目 利一 (NATSUME TOSHIKAZU)  
名古屋工業大学・工学系研究科・教授  
研究者番号：00125890

三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)  
中央大学・理工学部・教授  
研究者番号：70190725

小野 薫 (ONO KAORU)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：20204232