

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月4日現在

機関番号：14401
 研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540082
 研究課題名：微分形式の定める幾何構造（カラビーヤオ構造、一般化されたケーラー構造）の研究
 研究課題名（英文） Geometric structures defined by differential forms (Calabi-Yau structures, generalized Kaehler structures)
 研究代表者
 後藤竜司 (Ryushi Goto)
 大阪大学・理学研究科・教授
 研究者番号：30252571

研究成果の概要（和文）：

次の3点が新たに得られた結果である。

- (1) 一般化されたケーラー多様体の変形について、安定性定理を確立した。
- (2) 4次元多様体上の一般化された複素構造の対数変換による新しい構成. type changing loci の連結成分の数をいくらでも大きく出来るような新しい4次元の一般化された複素多様体を構成した。
- (3) 一般化されたカラビーヤオ計量，一般化された超ケーラー構造の構成

研究成果の概要（英文）：We obtain the following three results:

(1) Constructions of generalized Kaehler structures and unobstructed deformations:

We established the stability theorem of generalized Kahler structures and constructed many interesting examples. As an application, we showed that there exists a non-trivial bihermitian structure on compact Kahler surfaces with non-zero holomorphic Poisson structures.

(2) New constructions of generalized complex 4-manifolds by logarithmic transformations:

We explored the construction to apply arbitrary logarithmic transformations and obtain interesting generalized complex 4-manifolds with arbitrary large number of type changing loci.

(3) Constructions of generalized Calabi-Yau metrics and generalized hyperKaehler structures:

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 幾何学

キーワード：カラビヤオ多様体、変形理論、一般化された幾何構造、双エルミート構造、一般化されたケーラー構造、ポアソン構造

1. 研究開始当初の背景

Hitchin, Gualtieri により、一般化された複素構造、一般化されたケーラー構造が導入された。

H. J. Hitchin, Generalized Calabi-Yau structures, Q. J. Math. 54 (2003) 281-308,

M. Gualtieri, Generalized complex geometry no. 1, 75-123.

一般化されたケーラー構造は一般化された意味でのホッジ分解を与え、また数理論理において、 $N=(2, 2)$ 超対称シグマモデルにおけるターゲット空間のもつ幾何構造であることが示されている。

さらに、双エルミート構造と同値な構造である。

(c.f. V. Apostolov, P. Gauduchon and G. Grantcharov, Bihermitian structures on complex surfaces, Proc. London Math. Soc. 70 (1999) 414-428)

一般化されたケーラー構造はその重要性にもかかわらず、自明な例以外ほとんど得られていない状況であった。また一般化されたカラビヤオ計量、一般化された超ケーラー構造も非自明な例は全く知られていない状況であった。

2. 研究の目的

一般化された幾何学はポアソン幾何学、非可換幾何、導来圏の変形、4次元多様体の微分トポロジーそして数理論理学での超重重力路論などの関連が様々な形で指摘されている。これらとの関連を明らかにする事を目指した。

3. 研究の方法

筆者が以前の研究で確立した「特殊な閉微分形式の定める幾何構造の理論」に基づき、変形、貼り合わせ構成などにより、新しい例の構成を行った。また早野氏との共同研究つまり4次元多様体上の一般化された複素構造の研究において、対数変換、Kirby 図式など4次元多様体トポロジーの手法を使った。

4. 研究成果

カラビヤオ構造、一般化された幾何構造は研究代表者：後藤が導入した「特殊な閉微分形式の定める幾何構造の理論」が適用できる重要な幾何構造である。

この特殊な閉微分形式の定める幾何構造という見地から研究を行った。

カラビヤオ構造についてはカラビ予想（すなわちリッチ平坦ケーラー計量の存在と一意性の問題）を重要なノンコンパクト多様体のクラスにたいして示すことを目標とした。コーン型の場合にはケーラークラスがコンパクトサポートのコホモロジー群に入っていない場合も含めて

カラビ予想を示した。

一般化された幾何構造には一般化された複素構造, 一般化されたケーラー構造, 一般化されたカラビーヤオ構造, 一般化された超ケーラー構造などがあり, ポアソン幾何学, 非可換幾何, 導来圏の変形, 4次元多様体の微分トポロジーそして数理物理学での超重力路論などとの関連が様々な形で指摘されている。これらとの関連を明らかにする事を目指し, 一般化された幾何学の研究を進展させた。特に主な研究成果は次の5点:

(i) 一般化されたケーラー構造の安定性定理:

一般化されたケーラー多様体の変形について, 安定性定理を確立し, 様々な具体例を構成した。

これは, コンパクトケーラー多様体の微小な変形はまたケーラー多様体になるという小平-スペンサーによりケーラー多様体の安定性定理の拡張である。

つまり, 一般化されたケーラー多様体はその一般化された複素構造の微小な変形をしても, 一般化されたケーラー構造を保ち続けることを示している。

これによりコンパクトなケーラー多様体上に正則なポアソン構造があれば, 変形理論により, 非自明な一般化されたケーラー構造が得られることが示された(論文[4])。

さらに, 一般化されたケーラー構造と双エルミート構造との一対一対応を使えば, この構成により, ポアソン構造をもつコンパクトなケーラー曲面上に非自明な双エルミート構造が存在することが示された。

(ii) 4次元多様体上の一般化された複素構造の対数変換による新しい構成(論文[5])

対数変換を用いて, 新しい一般化された複素多様体の構成法を確立した。シンプレクティック4次元多様体に法束が自明なシンプレクティック部分トーラスがあったとする。このとき, この部分トーラスに任意の対数変換を施して得られる多様体は一般化された複素多様体となることを示した。この際, トーラスの部分にはジャンピングが起こっている。この新しい構成により, type changing loci の連結成分の数を任意の数に増やすことが出来ることを示した。

(iii) 一般化された幾何構造の変形理論
変形の障害が消える条件を与えた
(論文[3])。

(iv) コーン型のケーラー多様体のカラビ予想(論文[2])。

(v) 一般化されたカラビーヤオ計量, 一般化された超ケーラー構造の構成
ノンコンパクト多様体上のカラビーヤオ計量をポアソン構造により変形する事により, 新しい一般化されたカラビーヤオ計量を豊富に構成することに成功した。これは一般化されたカラビーヤオ計量の非自明な最初の例である。また一般化された超ケーラー構造の等質的ではない最初の例の構成にも成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

[1] R. Goto, "Unobstructed K-deformations of Generalized Complex Structures and Bihermitian Structures", *Advances in Math.* 231 (2012)1041-1067, 査読有。

[2] R. Goto, "Calabi-Yau structures and Einstein-Sasakian structures on crepant resolutions of isolated singularities", *J. Math. Society of Japan*, 64 (2012) No. 3, 1005-1052, 査読有。

[3] R. Goto, "Deformations of generalized

Calabi-Yau and generalized SU\$(n)\$-structures", Osaka Journal of Mathematic, 49 (2012) No. 3, 795-832, 査読有.

[4] R. Goto, "Deformations of generalized complex and generalized Kähler structures", Journal of Differential Geometry, 84 (2010) No. 3, 525-560, 査読有.

[5] R. Goto and K. Hayano, "C[∞] logarithmic transformations and generalized complex structures", arXiv:1304.4001

[6] R. Goto, "On the stability of locally conformal Kähler structures", arXiv:1012.2285

6. 研究組織

(1) 研究代表者

後藤竜司 (Ryushi Goto)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30252571

(2) 研究分担者

小木曾啓示 (Keiji Oguiso)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：40224133

研究分担者

藤木明 (Akira Fujiki)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：80027383

(3) 連携研究者

() 研究者番号：