様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ４ 月 ２８ 日現在

機関番号： １５３０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2013
課題番号： ２２５４００８５
研究課題名（和文） 非単連結同変多様体での交差や絡みとＫ－理論の研究

研究課題名（英文） Study of intersections and links on non-simply-connected equivariant manifolds and K -theory

研究代表者
森本　雅治（Morimoto, Masaharu）

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：３０１６６４４１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円、（間接経費）　　900,000円

研究成果の概要（和文）： G は有限群, X, Y は G が作用する滑らかな空間とする. X から Y へのG-写像 f が与えられたとき, X 上のG-手術と呼ばれる変形により f をホモトピー同値写像 g に変形できるか否かを判定する代数的要素（障害類）を考える. この研究では X のk-次ホモトピー群の要素と, G の部分群 H に関する, X の(k-1)次元不動点集合との絡みやｋ-次元不動点集合との交差を考察し, 弱ギャップ条件のもとで不動点集合の削除や追加を行うG-手術理論を与えた. またそれを応用し, Smith 同値である実G-表現空間の新たな組を豊富に構成した.

研究成果の概要（英文）： Let G be a finite group, and let X and Y be smooth G-manifolds. Given a G-map f from X to Y, there is an algebraic element (obstruction class) which determines whether one can convert f to a homotopy equivalence g by G-surgeries on X. In this research, considering links (resp. intersections) between elements of the k-th homotopy group of X and (k-1)-dimensional (resp. k-dimensional) H-fixed point sets of X for subgroups H of G, we gave a G-surgery theory to delete /insert fixed point sets in X. As applications of it, we construct various and many new pairs of Smith-equivalent real G-representation spaces.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 幾何学　トポロジー　多様体　絡みと交差　K-理論　変換群

１．研究開始当初の背景

通常は 3-次元-球面 S(3) とそこに埋め込まれた互いに交わらないサークルのファミリー F＝{f：S(1) ->S(3)} の組 (S3；F) が絡み目と呼ばれ，3-次元空間の幾何学（あるいは結び目理論）の研究者の重要な研究対象である．その研究では極めて高度で豊かな研究成果が得られてきたことは周知の事実である．その研究の高次元へのアナロジーも 1960 年代から，手術理論の研究者などによって行われてきた．例えば n-次元球面 S(n) 内に埋め込まれた m-次元球面 S(m)，m＝2n+1, 2n, のアイソトピーによる分類（結び目）の研究がある．

変換群論においては，次の研究がなされていた．

(1) 部分多様体の在り様を研究したものとして，コホモロジー複素射影空間 CP(n) 内にインボリューションの不動点集合と得られるコホモロジー実射影空間 RP(n) がある．

(2) 変換群論の問題というよりは結び目理論の問題，あるいは３次元多様体の問題として研究されたと言うべきであろうが，サークル S(1) が S(3) 上の巡回群の滑らかな作用による不動点集合として得られるとき，それは標準的な埋め込みとアイソトピックであろうという Smith 予想の研究も有名である．

(3) 長崎生光氏らは表現空間 V の単位球面 S(V) から他の表現空間の単位球面 S(W) への写像のアイソバリアントホモトピー類の全体を，コホモロジー群を用いて研究し，記述した．

結び目理論の専門家の視点に立てば，同変写像 S(V) -> S(W) と H-不動点集合 F(H, S(W)) の S(W) の埋め込みの間の「絡み数」のファミリーが長崎生光氏らの分類に利用された不変量と映るであろう．

同変絡み数と極めて近い概念に同変交差数（実際には関数であり，単なる数ではないため，同変交差形式を呼ぶほうが適切であろう）がある．

これまでの研究から，２つのアイソバリアント写像がアイソバリアントホモトピックであるか否かを判定する上では同変絡み数が，また同変写像 S(k) -> X がアイソバリアント写像にホモトピックか否かを判定する上では同変交差形式が有効であると予想した．

２．研究の目的

有限群 G の作用する n-次元多様体 M 内に配置された m-次元多様体のファミリーの配置の在り様や，そのファミリーに触れない幾何学的な同変変形の不変量を K-理論を用いて記述し，その幾何学的応用を研究すること（より具体的には，次の３点について研究する）を目的とした．

(1) アイソバリアント写像 f：S(V) -> X の絡み数 L(f) を G-集合Λから（整数群 Z の商群の直和）R への関数の形で記述する．L(f)はアイソバリアントホモトピー類を決定する不変量であることを示す．さらに，同変写像 f：S(V) -> X がアイソバリアント写像に同変ホモトピックであるための障害類が同変交差形式であることの定式化を行う．

(2) 同変多様体 X において，はめ込み A -> X と埋め込み B -> X の同変交差数と，普遍被覆空間 ~X，はめ込み A -> ~X と埋め込み B -> ~X の同変交差数の関係を明らかにする．

(3) 写像度 1 の同変束付き写像 f：X -> Y (b：TX -> f*ξ) に対して，それをホモロジー同値写像に同変手術するための障害類を，普遍被覆空間間の写像とそこでの同変交差形式を用いて記述する．

３．研究の方法

以下のように段階を踏んで研究を実施した．

(1) アイソバリアントホモトピーを，ある部分集合に接触しない同変ホモトピーと読み替え，長崎氏らのアイソバリアント理論を Whitney トリックを利用して再検討した．
そして，群の作用しない多様体での絡み目も扱える理論への拡張を研究した．

(2) 多様体 X の不動点集合とその普遍被覆空間 ~X の不動点集合との関係を~X への X の基本群の作用を用いて考察し，X における同変絡み数や同変交差形式を~X における絡みや交わりと比較して研究した．

(3) 非単連結同変多様体 X における同変ホモロジー手術障害類を quadratic forms の理論を用いて研究した．具体的には，同変絡み数や同変交差形式の研究を応用して，弱ギャップ条件もとで K-理論的に同変手術障害類の定式化を行った．さらに，この新たな障害類群に対して，Dress 型誘導理論，つまりどの様な設定の下で Mackey ファンクターとしての構造を持つのか，Frobenius Reciprocity Law が成立するのか，を研究した．

(4) これら研究を総合的に応用し，球面上の群作用の研究，境界で線形作用を持つディスク上の群作用の研究，実射影空間を不動点集合とする基本的な多様体上の作用の研究を深めた．

アイソバリアント理論については長崎 生光 氏，同変交差形式については桝田 幹也 氏，北田 泰彦 氏，同変手術理論，Dress タイプ誘導理論については Anthony Bak 氏，球面上の作用への応用については Krzysztof Pawalowski 氏，角 俊雄 氏らと，討議し，また緊密に研究情報を交換し，研究を円滑に進めるよう努めた．

４．研究成果

写像度 1 の G-写像 f：X -> Y とそれを stable に被覆する G-ベクトル束写像 b：TX -> ξ が与えられているとする（ここで X, Y は向き付けられた n-次元連結多様体で，n=2k > 5 とする）．

k-次元球面の X の自由軌道型の部分への

埋め込み h：S(k) -> X とその定める Gxh：G x S(k) -> X のアイソバリアントなイソトピー類が G-手術において重要である．このようなアイソバリアントイソトピー類の存在には同変写像 h : S(k) -> X と X の k-次元H-不動点集合の連結集合 F(k; H, X, i) の族（H は G の部分群の全体を渡る）との同変交差数が重要なデータであり，またイソトピー類の分類には h：S(k) -> X と X の (k-1)-次元H-不動点集合の連結集合 F(k-1; H, X, j) の族（H は G の部分群の全体を渡る）との絡みが重要なデータである．

Bak-森本はX, Y が 1-連結な場合には，この絡みを（quadratic）form parameter に反映させ，また同変交差の状況を配置写像で表し，f : X -> Y をホモトピー同値な G-写像に変形する同変手術障害類を（Wall 群，Bak 群を一般化した）Witt 群 U(X; Z) に実現していた．

いま R は整数環かその商還としよう．森本は {F(k; H, X, i)} が空集合である場合に，f : X -> Y をホモロジー同値な G-写像に変形する同変手術障害類を（Cappell-Shaneson 群を一般化した）Witt 群 V(X; R) に実現していた．

本研究では，X, Y が 1-連結でなくても，{F(k; H, X, i)} が空集合でなくても，h : S(k) -> X を普遍被覆空間へのリフト h : S(k) -> ~X を用いてそれに関する絡みと同変交差を考察し，U(X; R)，V(X;R) を一般化した Witt 群 W(X; R) を構成し f : X -> Y をホモロジー同値な G-写像に変形する同変手術障害類 σ(f, b) を W(X; R) に実現した．すなわち次の定理を得た．

定理１． f : X -> Y を X の自由軌道型部分における G-手術で R-ホモロジー同値写像にできるのは，σ(f, b) = 0 のときである（そのときに限る）．

また定義から自然な写像 μ : W(X; R) -> U(X; R) が存在する．上の定理１を応用するには σ(f, b) = 0 となる十分条件を得ることが重要である．本研究で得た次の定理は，この意味において重要である．

定理２．R の要素の個数は奇素数 p であるとする．また X の基本群は有限群でその位数は p で割り切れないとする．このとき μ : W(X; R) -> U(X; R) は同型写像である．

本研究において，U(X, R) の Dress 型誘導定理を証明し，次の結果を得た．

定理３．R と X は定理２のものとする．このとき W(X; R) について Dress 型誘導定理が成り立つ．

これら定理１～３の正確な記述と証明は Publ. RIMS 48 No. 3 (2012), pp.623--651 にて発表した．

実 G-表現空間 V が球面 S 上の作用で不動点集合 F(G, S) が唯一の点 a からなり，そこでの接空間表現 Ta(S) が V に同型であるとき V は OFP-型であると呼び，この S を V の OFP-球面と呼ぶことにしよう．Laitinen-森本の結果から，OFP-球面は G が Oliver 群であるときのみ存在する．

実 G-表現空間 V, W が Smith 同値であるとは，不動点集合 F(G, S) が２点 a, b からなり，それぞれでの接空間表現が V, W に同型であるときをいう．Smith 同値な実 G-表現空間 V, W の表現環における差 V－W の全体を Smith 集合と呼び，Sm(G) で表す．また V, W がSylow-適合であるとは，G の任意の Sylow 部分群 P への V. W の制限が同型な実P-表現空間であるときをいう．

本研究において次の定理を得た．

定理４．V, W がそれぞれ OFP-球面 X, Y をもち，X, Y は弱ギャップ条件を満たすとする．もし，V と W がP-適合であるならば，V と W は Smith 同値である．

この定理の詳細（証明を含む）は J. Math. Soc. Japan に掲載予定の論文 Tangential representations of one-fixed-point actions on spheres and Smith equivalence にて発表予定である（Math. Soc. Japan のWEBページですでに発表されている)．
また，定理４を用いると多くの Oliver 群 G に対して Sm(G) が決定できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① M. Morimoto, *Tangential representations of one-fixed-point actions on spheres and Smith equivalence*, accepted by J. Math. Soc. Japan. 査読付
② M. Morimoto, *Deleting and inserting fixed point manifolds under the weak gap condition*, Publ. RIMS **48** No. 3, 623--651, 2012. DOI 10.2977 査読付
③ M. Morimoto and Y. Qi, *The primary Smith sets of finite Oliver groups*, Group Actions and Homogeneous Spaces, Proc. Inter. Conf. Bratislava Top. Symp. (2009), eds. J. Korbas, M. Morimoto and K. Pawalo- wski, Comenius Univ., Bratislava, 61--73, 2011. (http://www.fmph.uniba.sk/index.php?id=2796) 査読付
④ M. Morimoto, *Nontrivial P(G)-matched S-related pairs for finite gap Oliver groups*, J. Math. Soc. Japan **62** No. 2, 623--647, 2010. DOI 10.2969 査読付

〔学会発表〕（計 11 件）

① M. Morimoto, *Remarks on Smith equivalent representations*, Knots, Manifolds, and Transformation Groups, Slubice, 2013.09.11

② M.Morimoto , *Smooth one fixed point actions on spheres and the Smith equivalence*, 第39回変換群論シンポジウム東京, 2012.11. 23

③ M. Morimoto, *Smooth one-fixed-point acions on spheres and related topics*, Geometry of Manifolds and Group Actions, Gdansk, 2012.09.06

④ M. Morimoto, *Equivariant surgery to obtain homology equivalences*, 第38回変換群論シンポジウム, 神戸, 2011.11.20

⑤ M. Morimoto, *Induction theory of equivariant surgery obstructions*, Grop Actions in Topology and Analysis, Milan, 2010.09.14-17.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ems.okayama-u.ac.jp/appl/morimoto/publmme.html

６．研究組織
(1)研究代表者

森本　雅治（MORIMOTO MASAHARU）
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：30166441