様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月　１７　日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２０１０～２０１２
課題番号：２２５４００８６
研究課題名（和文）　多様体の構造と漸近的性質

研究課題名（英文）　Structures of manifolds and asymptotic properties

研究代表者
勝田　篤（KATSUDA ATSUSHI）
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号：６０１８３７７９

研究成果の概要（和文）：
境界付多様体上のラプラシアンの固有値、固有関数の境界値から多様体内部の幾何を同定するという幾何学的スペクトル逆問題の安定性および双曲力学系の素閉軌道の周期の漸近分布、特に数論のアナロジーおよびその発展について考察した。前者については、境界付多様体の境界からの距離関数からから内部の距離を近似的に再構成する部分の幾何学的条件の緩和を行った。後者については離散 Heisenberg 群拡大に対する Dirichlet の密度定理型の結果に関し、表現論、摂動論、反復積分、半古典解析らを適用する枠組を得た。

研究成果の概要（英文）：
We consider stability of geometric spectral inverse problems, which is the problems to get geometric information of manifolds from the eigenvalues and the boundary values of eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary, and asymptotic distributions of periods of prime closed orbits on hyperbolic dynamical systems, which are analogy to the prime distribution of the number theory and beyond. Concerning the former problems, we obtain boarder geometric conditions for determination of interior metric from boundary distance function of manifolds with boundary. For the latter case, we get the frame applying the representation theory, perturbation theory, iterated integrals and semi-classical analysis for the Dirichlet density theorem for the Heisenberg extensions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	１２０００００	３６００００	１５６００００
２０１１年度	１１０００００	３３００００	１４３００００
２０１２年度	１００００００	３０００００	１３０００００
年度			
年度			
総　計	３３０００００	９９００００	４２９００００

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：スペクトル逆問題、双曲力学系、密度定理

１．研究開始当初の背景

幾何学的スペクトル逆問題とは、境界付リー

マン多様体のノイマン条件の下でのラプラス作用素の境界スペクトル情報、つまり固有値と固有関数の境界値から、多様体の位相構造、計量構造を求める問題である。この問題は、リーマン幾何学と解析学の問題意識の交流点にある問題であり、さらに工学における非破壊検査、インピーダンス CT、地球内部の構造の推定といった実際面の応用とも関連する。この問題は、Gel'fand により提出され、すべてかつ正確な境界スペクトル情報から、多様体の構造を決定するという問題に対しては、Belishev-Kurylev により、Tataru の双曲的微分方程式の一意性の結果と合わせて、完全な結果が得られていた。

これに対し現実の状況においては、はじめに得られる境界スペクトル情報は、一部分の固有値、固有関数の誤差を含んだものでしか得られない。そこで、このような不完全かつ不十分な情報から、多様体の近似的情報を得るという安定性の問題は重要である。その際、一般に逆問題は、非適切とよばれる種類の問題であるので、条件付安定性、つまりあらかじめいくつかの先験情報を与えてその範囲での安定性を調べることになる。これは幾何学的観点からはあらかじめ考える多様体のクラスを設定しておいて、その中で考えることに対応し、ピンチング問題等、リーマン幾何学で古くから考えられてきた問題の設定と合致する。これまで Anderson, Kurylev, Lassas, Taylor との共同研究において Ricci 曲率、単射半径、直径に対する条件をつけたクラスの多様体に対し、抽象的安定性、つまり上に条件のみに依存するある範囲があって、境界スペクトル情報がその範囲に収まっていれば、多様体はある程度決定できるというものが知られていた。また、その多様体を近似する空間を再構成するという問題に対しては、Kurylev,Lassas と共同で、断面曲率のヘルダーノルム、単射半径に関するの条件の下で、境界距離から内部距離を決める部分については近似的再構成に関する結果を得ていた。

双曲力学系の閉軌道の周期の分布ついては、負曲率多様体上の素な閉測地線の長さの分布が、数論における素数定理の類似をみたすことが Selberg,Margulis,Parry,Pollicott らにより知られていた。π(x) を周期 x 以下の素閉測地線の個数とするとき、位相エントロピーとよばれる正数 h が存在して

$$\pi(x) \sim \frac{e^{hx}}{hx}$$

（ここで f(x) ~ g(x) は、f(x)/g(x) の $x\to\infty$ での極限が 1 に近づくことを意味する。）
さらに拡張として、Dirichlet の算術級数定理の幾何学的類似、つまり、はじめに多様体の基本群から上への準同型を持つ与えられた群の共役類に対し、それの表す共役類の準同型の像がされに属するような素閉測地線の長さの分布の漸近挙動を調べる問題が考察されてきた。与えられた群が有限群の場合は、数論のアイデアがそのまま使えることもあり、足立一砂田、Parry-Pollicott により、次の結果が得られていた。π(x,α) を周期 x 以下の共役類 α に属する素閉測地線の個数とするとき、

$$\pi(x,\alpha) \sim \frac{1}{C(G)}\frac{e^{hx}}{hx}$$

（ここで C(G) は与えられた群 G の位数を表す。）
群が無限群の場合は、数論において対応する状況がない場合であったが、Abel 群の場合は、以前、砂田との共同研究において次のような満足すべき結果が得られていた。

$$\pi(x,\alpha) \sim C\frac{e^{hx}}{x^{1+b/2}}$$

(ここで C は多様体の幾何から定まる定数、b は Abel 群の階数を表す。)
尚、この結果は Phillips-Sarnak, Lalley, Pollicott も独立に得ていた。

さらに関連する問題としては、コンパクト多様体または有限グラフの被覆上の Brown 運動あるい酔歩の時間無限大での漸近挙動の問題がある。被覆変換群が無限 Abel 群の場合は双曲力学系の素閉軌道での議論の類似が適用でき、いくつかの結果が得られていた。さらにべき零被覆の場合にも、これとは異なり､熱核の gradient 評価を利用した結果が得られていた。

２．研究の目的

幾何学的スペクトル逆問題については、以前 Anderson, Kurylev, Lassas, Taylor と得た安定性の結果は、Gromov による多様体の収束理論の拡張し、位相空間論でよく知られた、コンパクトな空間への連続な単射は、位相同型を導くという議論を用いているため、抽象的安定性が得られるのみであった。　具体的に、この程度の近似された空間を得るためにはどのくらいのデータがあればよいかという問題の解決が望まれるところである。上の結果では、境界スペクトルデータから、境界から内部の点までの距離関数を決定するために境界制御法を用い(解析的部分)、境界距離関数から内部の多様体の幾何構造や位相構造を決定する部分では、リーマン幾何の手法を用いている。（幾何的部分）解析的部分での具体的評価に関しては、今の所、双曲方程式の部分で困難が残っている。そこで幾何的部分を先に考えることにして、この部分における具体的評価かつ再構成アルゴリズムを Kurylev,Lassas と考察したのであった。

しかし、この結果の幾何学的仮定が先の結果に比べて強いのでこれを緩和することを考えるのが今回の目的であった。
　双曲力学系の素閉軌道の分布に関しては、無限非Abel群に関するDirichlet算術級数定理の幾何学版に挑戦したい。これは、類対論の非Abel群の場合の拡張のLanglands予想が数論の中心的問題となっているように、理論的に非常に興味深い問題である。そのための第一歩としてべき零群の場合やさらにその基本的な例であるHeisenberg群の場合を考察する。

３．研究の方法
　幾何学的スペクトル逆問題については、境界距離関数から内部距離を得る幾何学的部分について、Ricci曲率が下に有界な空間に関する最近の知見を活用する。
　双曲力学系の閉軌道の分布については Abel群の場合に成功した表現論、摂動論の拡張を試みる。また当初の計画では、コンパクト多様体や有限グラフのべき零被覆上の Brown運動や酔歩の漸近挙動の評価で用いられた解析的議論の閉軌道の分布の場合への適用の可能性を考えることもあった。

４．研究成果
幾何学的スペクトル逆問題については、幾何学的部分について調べた。以前得られていた断面曲率のヘルダーノルム仮定の下を、リッチ曲率と単射半径に関する条件に緩和した。境界距離関数から内部の２点の距離を求めるアルゴリズムは以下の通りである。
（１）内部の２点を結ぶ測地線を延長して境界まで到達する場合は、境界距離の差を取れば、２点間の距離がわかる。
（２）Sardの定理の証明に類似のdensityに基づく議論により、（１）のような条件をみたす３点が存在することを示す。
（３）Andersonらと示した抽象的安定性の論文の中で、リッチ曲率、単射半径の仮定の下で、リーマン計量テンソルの微分のジグムントノルムの評価が得られていた。
（４）（３）より、各点の近傍の計量とユークリッド計量の近さが定量的に評価できることがわかり、さらに（２）より、３点のなす３角形の各辺の長さがわかるので、ユークリッド計量での３角形と比較することにより、任意の２点間の距離が近似的にわかる。
（５）計量構造から位相構造が決定されることは Gromov の収束定理の証明に類似の議論からわかる。
双曲力学系の閉軌道の分布については、まず離散べき零群に対し、次のような漸近挙動が成立することを予想している。(記号については研究開始当初の背景を参照)

$$\pi(x,\alpha) \sim C\frac{e^{hx}}{x^{1+b/2}}$$

(ここで C は多様体の幾何から定まる定数、b はべき零群の語距離に関する体積増大度を表す。)
　当初は、コンパクト多様体や有限グラフのべき零被覆上のBrown運動や酔歩の漸近挙動の評価で用いられた解析的議論の適用を試みたが、これは今の所うまくいっていない。Abel群の場合に成功した表現論、摂動論の拡張については以下のような枠組みで考えればよいのではないかと考えている。
　はじめに Abel 群の場合の議論を振り返る。
（ア）力学系の Ruelle 型の L 関数を考え、これの高階の対数微分を指標群上積分する。
（イ）この積分の特異点を調べるには、自明指標の近くでのL関数の極の振る舞いを知ることが大切であり、これはラプラシアンや Ruelle 作用素の固有値が関与することがわかる
（ウ）上記作用素の固有値の指標に関する、自明指標におけるHessianが正定値であることを、作用素の摂動の議論を用いて示す。
というものであった。
（エ）Tauber型の定理を用いて積分の特異点の振る舞いと閉軌道の漸近分布と結びつける。
　これを Heisenberg 群に対し拡張するには以下のようにすればよいと考えている。(拡張における困難な点とそれをどのように克服すべきかについて述べる。)
（ａ）Abel群の場合、表現は１次元表現つまり指標に分解されるわけであるが、離散Heisenberg群の表現は、非Ｉ型であり、そのままでは既約表現への分解等の点に困難があった。そこでその表現の内、有限次元表現がユニタリ双対の中で稠密なこと、さらに有限次元表現に台をもつ有限加法的測度で分解できること(Plancherelの定理)を用いる。
（ｂ）Abel群と同様、自明表現の近くでの作用素の固有値の振る舞いを調べることが重要であるが、上記有限次元表現が自明表現に近づくにつれ、その次元が無限大に発散するので、それを Heisenberg Lie 群の無限次元表現で近似する。
（ｃ）作用素の固有値のHessianに相当するものとして、調和振動子があらわれる。(この部分では Abel 群で微分形式の線積分の拡張として、反復積分が用いられ、摂動論の正当化には半古典解析が用いられる。)
（ｄ）L 関数の高階微分の（ａ）での Plancherel 積分の振る舞いを調和振動子の固有値、固有関数の漸近挙動等を用いて調べる。
　ただし、残念ながら（ｄ）の部分はまだ未完成であり、今後の継続研究を要する。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計　　０件）

〔学会発表〕（計　　５件）
1. 勝田　篤、境界付多様体の境界距離表現と内部距離，　研究集会 測地線及び関連する諸問題，2011 年 1 月，　熊本大学

2. 勝田　篤、 Density theorems of closed geodesics for nilpotent extensions,
福岡大学微分幾何学研究会，2011 年 11 月，福岡大学

3. 勝田　篤、Closed geodesics and heat kernels on nilpotent coverings,　研究集会 測地線及び関連する諸問題，2012 年 1 月，熊本大学

4. 勝田　篤、ハイゼンベルグ群に対する幾何学的密度定理に向けて，　研究集会 測地線及び関連する諸問題，2013 年 1 月，　熊本大学

5. A. Katsuda, Toward a geometric density theorem for nilpotent extensions, Low dimensional topology and number theory V, 2013 年 3 月，　福岡ソフトリサーチパーク

〔図書〕（計　　１件）
１.A.Katsuda, Closed geodesics and heat kernels on nilpotent coverings, 12 --24, Geometry and Something 2011

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

○取得状況（計　０　件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
勝田　篤　（教授　）
九州大学大学院数理学研究院
研究者番号：６０１８３７７９

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし