

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 27 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540089

研究課題名(和文) 可換群における代数的閉包と群位相での閉包の相互作用及びコンパクト型群位相化の研究

研究課題名(英文) Interplay between algebraic and topological closure operators, and existence of compact-like group topologies on abelian groups

研究代表者

D・B Shakhmatov (Shakhmatov, Dmitri)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90253294

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：可換群 $G$ の濃度が実数直線のべき集合の濃度以下であるとき、 $G$ の任意の部分集合 $A$ に対し、 $A$ のMarkov-Zariski閉包は位相 $T$ における $A$ の閉包と一致し、 $(G, T)$ の完備化がコンパクト位相群になるような $G$ 上の群位相 $T$ が存在することを証明した。可換群 $G$ の濃度が実数直線のべき集合の濃度以下であるとき、 $G$ の稠密可能な部分集合の特徴付けを得た。コンパクト群 $G$ のすべての稠密な部分集合のある位相的性質を用いて $G$ が距離付け可能になるための必要十分条件を解明した。位相群がLie群になるための三つの必要十分条件を得た。

研究成果の概要(英文)：We characterize potentially dense subsets of abelian groups  $G$  of size at most the power set of the continuum, and we show that the Markov-Zariski closure of a subset  $S$  of such a group  $G$  can be realized in some precompact group topology on  $G$ . (In particular, potential denseness of a set in  $G$  can be witnessed by some precompact group topology of  $G$ .) New metrizable criteria for compact groups are obtained. We also provide various characterizations of Lie groups by means of controlling their zero-dimensional closed subgroups. Multiplier convergence theory of topological groups is developed.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相群 トポロジー コンパクト 代数学 代数的閉包

### 1. 研究開始当初の背景

(1)  $G$  を群とする。自然数  $n$ ,  $G$  の元  $g_1, g_2, \dots, g_n$  と  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$  に対し、集合  $\{x \in G: x_1^{a_1} g_1 x_2^{a_2} g_2 \dots x_n^{a_n} g_n = 1\}$  を  $G$  の基本代数的集合と呼び、有限個の基本代数的集合の和集合を  $G$  の代数的集合という。(ただし、 $1$  は  $G$  の単位元である。) 群  $G$  のすべての代数的集合が閉集合になるような  $G$  上の最弱位相を  $G$  の Zariski 位相 (または verbal 位相) という。群の Zariski 位相が Markov (1946) による導入され、Bryant (1977), Baumslag, Myasnikov, Remeslennikov (1999) により研究された。

(2) Markov (1946) による、群  $G$  上のすべての Hausdorff 群位相で閉集合になる集合を  $G$  の無条件閉集合と呼ぶ。群  $G$  のすべての無条件閉集合が閉集合になるような  $G$  上の最弱位相を  $G$  の Markov 位相という。

(3) 群の Zariski 位相と Markov 位相は共に  $T_1$  位相であるが特別な場合を除いて、Hausdorff ではない。また、代数的集合は必ず無条件閉集合であるため、Zariski 位相は Markov 位相より弱い。Markov (1946) は任意の可算群の Zariski 位相と Markov 位相は一致することを示し、非可算群の場合でも、その二つの位相が一致するか否かを未解決問題として提出した。反例が Hesse (1979) により得られている。Dikranjan, Shakhmatov (2008) は任意の可換群の Zariski 位相と Markov 位相は一致することを証明し、非可換群の場合でも、Zariski 位相と Markov 位相が一致するための必要十分条件を得た。

(4) Markov (1946) により、群  $G$  上のある Hausdorff 群位相での稠密な部分集合を  $G$  の稠密可能な部分集合 (potentially dense 集合) と呼ぶ。Markov (1946) は稠密可能な部分集合の特徴付け問題を提出した。

### 2. 研究の目的

(1) 可換群上のコンパクト型群位相が存在するための必要十分条件を得ること。

(2) 可換群での稠密可能な部分集合の特徴付けを得ること。(Markov の稠密可能な部分集合問題)

(3) 可換群の Markov-Zariski 閉包をあるコンパクト型群位相での近似を得ること。

(4) 可換位相群の各種の閉包作用素に関する稠密な部分集合の位相的性質を解明すること。

### 3. 研究の方法

(1) 海外共同研究者と日常的に電子メールで意見交換を行った。

(2) 海外共同研究者と年 1 回相互に訪問し、共同研究を実施した。

### 4. 研究成果

(1) 可換群  $G$  の濃度が実数直線のべき集合の濃度以下であるとき、 $G$  の任意の無限部

分集合  $A$  に対して円周群  $T$  の連続体濃度のべき乗  $H$  への準同形写像  $f$  が存在して  $f(A)$  は  $H$  で稠密になるための必要十分条件を得た。

(2) 可換群  $G$  の濃度が実数直線のべき集合の濃度以下であるとし、 $G$  の部分集合からなる可算な族  $S$  を考える。族  $S$  に属する各集合  $A$  に対して、 $A$  の Markov-Zariski 閉包と位相  $T$  における  $A$  の閉包は一致するような  $G$  上の群位相  $T$  が存在することを証明した。また、 $(G, T)$  の完備化がコンパクト位相群になるような  $T$  を構成した。

(3) 可換群  $G$  の稠密可能な部分集合  $A$  の性質を解明した。 $G$  の可算部分集合  $A$  は  $G$  で稠密可能であるための必要十分条件は  $G$  の濃度が実数直線のべき集合の濃度以下で  $A$  の Markov-Zariski 閉包は  $G$  と一致することを証明した。この結果は Markov の稠密可能な部分集合の特徴付け問題の一部解決である。また、この結果の特別な場合は Tkachenko, Yaschenko の問題の解決でもある。

(4) あるコンパクト型性質をもつ位相群  $G$  のすべての零次元距離付け可能な (コンパクト) 閉部分群は離散であるとき、 $G$  は Lie 群になるか否かを調べた。コンパクト型性質として、(局所)コンパクト、(局所)  $\omega$ -有界、(局所)可算コンパクト、(局所)precompact、(局所)minimal と点列完備を調べた。以下の Lie 群の特徴付けを証明した。

① 位相群  $G$  は Lie 群になるための必要十分条件は  $G$  は無限零次元距離付け可能なコンパクト部分群を含めない局所コンパクト群である。

② 可換位相群  $G$  は Lie 群になるための必要十分条件は  $G$  は局所 minimal かつ局所 precompact で  $G$  のすべての零次元距離付け可能な閉部分群は離散である。

③ 可換位相群  $G$  はコンパクト Lie 群になるための必要十分条件は  $G$  は無限零次元距離付け可能な閉部分群を含めない minimal 群である。

④ 無限位相群  $G$  はコンパクト Lie 群になるための必要十分条件は  $G$  は空でない連結な開集合をもつ無限零次元距離付け可能なコンパクト部分群を含めない点列完備、precompact、局所 minimal 群である。

(5) 位相群  $G$  の稠密な部分群  $D$  が  $G$  を determine するとは  $G$  の双対群から  $D$  の双対群への制限写像は同相写像かつ同形写像であることとする。 $R$  を実數位相群、 $Z$  を整数部分群、 $T=R/Z$  を円周位相群とし、 $p$  を  $R$  から  $T$  への商写像とする。位相群  $G$  の部分集合  $X$  が  $G$  で qc-稠密であるとは  $G$  から  $T$  への零でないすべての連続群準同形写像  $f$  に対し、 $f(X)$  は  $p([-1/4, 1/4])$  の部分集合でないこととする。位相群  $G$  の稠密な部分群  $D$  は  $G$  を determine するための必要十分条件は  $D$  が  $G$  での qc-稠密なコンパクト部分集合  $X$  を含むことが知られている。無限コンパクト位相空間  $X$  の点  $x$  以外の点はすべて孤立点であるとき、 $X$  を点  $x$  に収束する長点列と呼ぶ。

① 無限コンパクト可換位相群  $G$  の零元  $0$  の弧上連結成分  $C$  が  $X$  の濃度が  $G$  の weight 以下となる  $0$  に収束する長点列  $X$  をもつための必要十分条件は  $G$  が連結であることを証明した。

② 無限コンパクト可換位相群  $G$  の零元  $0$  の弧上連結成分  $C$  が最小な濃度をもつ suitable 集合を含むための必要十分条件は  $G$  が連結であることを証明した。

③ すべての無限連結コンパクト群  $G$  に対し、等式  $qcw(G)=w(c(Z(G)))$  が成り立つことを証明した。ここで  $qcw(G)$  は  $G$  での  $qc$ -稠密な閉集合の最小な weight で  $w(c(Z(G)))$  は  $G$  の center  $Z(G)$  の連結成分  $c(Z(G))$  の weight を表す。

(6) 可換コンパクト群  $G$  は距離付け可能になるための必要十分条件は  $G$  のすべての稠密な部分群  $D$  は  $G$  を determine することが Hernandez, Macario, Trigos-Arietta による知られている。可換位相群  $G$  の稠密な部分群  $D$  が  $G$  を determine する概念に関連している 4 つの性質を導入した。

①  $K$  の weight は  $D$  の weight に一致するような  $D$  のコンパクト部分集合  $K$  が存在するとき、 $D$  は  $w$ -コンパクトという。

②  $D$  の weight は  $D$  の濃度以下であるとき、 $D$  を Arhangel'ski 空間と呼ぶ。

③  $D$  のすべての連続群準同形写像による像は  $w$ -コンパクトであるとき、 $D$  は projectively  $w$ -コンパクトという。

④  $D$  のすべての連続群準同形写像による像は Arhangel'ski 空間であるとき、 $D$  は projectively Arhangel'ski という。

コンパクト位相群  $G$  のすべての稠密な部分集合  $D$  は上の条件をそれぞれ満たすとき、 $G$  は距離付け可能になるか否かを調べた。特に、以下の結果を得た。

A. コンパクト位相群  $G$  のすべての稠密な部分群は projectively Arhangel'ski 条件を満たすとき、 $G$  は距離付け可能である。

B. 連結または可換位相群  $G$  のすべての稠密な擬コンパクト部分群は projectively  $w$ -コンパクトならば  $G$  は距離付け可能である。

C. 可換位相群  $G$  のすべての稠密な擬コンパクト部分群は  $G$  を determine するとき、 $G$  は距離付け可能である。この結果は Hernandez, Macario, Trigos-Arrieta の問題の解決である。

(7)  $f$  を自然数全体の集合  $N$  から  $N$  に無限大を加えた集合  $M$  への関数とする。群  $G$  の点列  $a_n$  が  $f$ -収束するとは整数からなる任意の列  $z_n$  が与えられたとき、すべての自然数  $n$  に対して  $|z_n|$  が  $f(n)$  以下であるならば  $G$  の点列  $a_1^{z_1} \dots a_k^{z_k}$  はある  $G$  の元に収束することである。位相群  $G$  の  $f$ -収束する点列の存在を調べた。

①  $G$  が局所コンパクトや距離付け可能であるとき、 $f$ -収束する点列の存在について結果を得た。

②  $f_w$  はすべての自然数  $n$  で無限大の値を

とる関数を表す。点列  $a_n$  は  $f_w$ -収束するが  $N$  から  $N$  へのある全単射  $g$  に対し、点列  $a_{g(n)}$  は発散するような可分距離付け可能な位相群の点列  $a_n$  の例を構成した。この結果は Dominguez, Tarieladze の問題の解決である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

① D. Dikranjan, D. Shakhmatov, Metrizability criteria for compact groups in terms of their dense subgroups, *Fundamenta Mathematicae*, 221 (2013), 161--187, 査読有

② D. Dikranjan, D. Shakhmatov, Quasi-covexly dense and suitable sets in the arc component of a compact group. *Mathematische Nachrichten* 285 (2012), 476-485, 査読有

③ M. Nagao, D. Shakhmatov, On the existence of kings in continuous tournaments. *Topology and its Applications* 159 (2012), 3089-3096, 査読有

④ D. Dikranjan, D. Shakhmatov, A Kronecker - Weyl theorem for subsets of abelian groups, *Advances in Mathematics* 226 (2011), 4776-4795, 査読有

⑤ D. Dikranjan, D. Shakhmatov, J. Spevak, Productivity of sequences with respect to a given weight function, *Topology and its Applications* 158 (2011) 298-324, 査読有

[学会発表](計 5 件)

① D. Shakhmatov, Properties characterizing Lie groups among compact-like groups, *International Conference on Topology and Geometry 2013 (joint with the 6th Japan-Mexico Topology Symposium)* (2013年9月2日), 島根大学, 松江, 招待講演

② D. Shakhmatov, Characterizations of Lie groups via finiteness conditions on their zero-dimensional subgroups, 第60回トポロジーシンポジウム (2013年8月6日), 大阪市立大学, 大阪, 招待講演

③ D. Shakhmatov, Metrizable compact groups via conditions on their dense subgroups, *TOPOSYM 2011: The 11th Topological Symposium, International Conference on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra* (2011年8月8日), Prague, Czech Republic, 招待講演

④ D. Shakhmatov, Topological properties of the Markov-Zariski topology of an abelian group, *2010 International Conference on Topology and its Applications*,

(2010年6月27日), Nafpaktos, Greece

⑤ D. Shakhmatov, Two decades of the pseudocompact group topologization problem, Algebra meets Topology: Advances and Applications (2010年7月21日), Universitat Politecnica De Catalunya, Barcelona, Spain, 招待講演

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

本研究の成果を以下のホームページで公開されている。

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~dima>

/

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

D.B. Shakhmatov (Dmitri Shakhmatov)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90253294