様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 １３ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４００９２

研究課題名（和文）幾何的極限を利用した位相的クライン群の統一的研究

研究課題名（英文）Uniform research of topological Kleinian groups by using geometric limits

研究代表者
相馬　輝彦（Soma, Teruhiko）

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：５０１５４６８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円、（間接経費）　　960,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，位相的クライン群論の主要な結果を統一的に説明する基本定理を証明することにあった．特に関心があったのが，クライン群の幾何的極限の位相的および幾何的な分類である．本研究以前は，擬フックス群のような特別なクライン群の列で代数的に収束する列の幾何的極限に関してのみ分類がされていたが．本研究では，同じ位相型を持つ任意の幾何的有限クライン群の列で，必ずしも代数的には収束するとは限らないものに関しても幾何的極限の位相的および幾何的分類に成功した．さらに，その応用として，幾何的極限に関するエンディング・ラミネーション定理が証明できた．

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to prove fundamental theorems to explain uniformly main results on topological Kleinian group theory. In particular, we are interested in the topological and geometrical classifications of geometric limits of Kleinian groups. Before our research, this classification was done only for sequences of special Kleinian groups (e.g. quasi-Fuchsian groups) which admit algebraic limits. Though this project, we have succeeded in classifying topologically and geometrically geometric limits of an sequences of geometrically finite Kleinian groups which have the same topological type which do not necessarily converge algebraically. Moreover, as an application, we have proved that the Ending Lamination Theorem for geometric limits.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学　微分トポロジー

１．研究開始当初の背景

幾何学，特に多様体の研究において幾何的極限の概念は本質的に重要である．適当な条件をみたす多様体の族が，どのような共通の性質を持つかを研究するとき，その族から無限列を取り，その極限を調べることが有効な手段であることが知られている．このような考えは，微分幾何から発生したものであり，対象となるのは，体積，単射半径，曲率等に関して適当な条件を持つ多様体の集合である．本研究の目的は，幾何的極限の理論を無限体積の双曲３次元多様体およびクライン群の族に適用することにある．

21 世紀前半における，3 次元多様体論で最も注目を集めたニュースは，G. Perelman による３次元閉多様体の幾何化予想の解決である．この予想は，W. Thurston の未解決問題集(Bull. Amer. Math. Soc. 1982)で提出されたものである．一方，3 次元開多様体に関しても，ほとんど同時期に，この問題集にある 2 つの主要な予想「テーム・エンド予想」と「エンディング・ラミネーション予想」が相次いで解決した．テーム・エンド予想は，I. Agol (preprint) と D. Gabai-D. Calegari (J. Amer. Math. Soc., 2006) によって，独立に証明された．今では，より簡明な証明が，本研究代表者 (Geom. Topol. 2006) によって与えられている．テーム・エンド予想の解決により，有限生成基本群を持つ双曲３次元多様体 N の不変量として，幾何的有限エンド上の等角構造と幾何的無限エンド上のエンディング・ラミネーションが矛盾なく定義できることが分かった．これを，N のエンド不変量という．エンディング・ラミネーション予想に関しては，Y. Minsky (Ann. of Math. 2010, 2012) （一部分共同研究）によって，解決した．この予想の解決により，エンド不変量によって N の等長型が一意的に決まることが証明された．すなわち，エンド不変量による双曲 3 次元開多様体の分類が完成したことになる．この結果を利用して，本研究分担者の大鹿健一氏 (Geom. Topol. 2011) は，これも Thurston の未解決問題集にある「稠密性予想」を肯定的に解決した．これらの結果が次々と発表されていた頃，研究代表者は擬フックス群の幾何的極限の分類問題を研究していた．成果として，位相的分類に関しては一応の完成をみた．この結果は，さらに一般の双曲多様体に関しても成り立つことが期待できたので，本研究課題として科学研究費補助金を申請した．その時点では，この結果はまだ特殊な双曲多様体（3 次元双曲空間の擬フックス群による商空間）に関するものであり，さらに擬フックス群の列が代数的に収束する場合のみを考えていた．しかし，そのような特殊な場合であるにもかかわらず，双曲幾何学に関連する海外の主要な研究集会から続けて講演依頼があったことからも，注目される結果であったと考えられる．この時点での研究代表者の研究は，テーム・エンド 予想やエンディング・ラミネーション予想とは直接関係しない，オーソドックスな双曲幾何的手法を使ったものであった．しかし，その証明は明快なものではなかった．そのため，研究分担者（大鹿）との共同研究では，エンディング・ラミネーション予想の中核をなす「双リプシッツ・モデル定理」を主要な攻略手段として用い，幾何的極限の研究を最初からやり直すことにした．これによって，擬フックス群の幾何的極限の位相的分類定理の証明が簡明になったばかりでなく，幾何的分類定理も証明できた．

また，それまでとは逆に，「幾何的極限」と「最小面積曲面論」という双曲幾何と３次元トポロジーの標準的手法を使って双リプシッツ・モデル定理を直観的に捉えやすい形で証明することができた．この結果は，Minsky の定理に対する「クロス・カウンター」と考えることができる．幾何的極限を使った証明の利点としては，幾何的で分かり易いことや，その手法に汎用性があることなどがあげられる．これが，「幾何的極限を主要な手段として，クライン群（双曲３次元開多様体）を統一的に説明する基本定理が証明できないか」という考えに至った理由である．

２．研究の目的

Minsky のエンディング・ラミネーション予想の証明で，もっとも重要な役割をはたすのが Brock-Canary-Minsky の論文(2012)で与えられた「双リプシッツ・モデル定理」である．この定理は，「与えられた双曲 3 次元開多様体 N のエンド不変量のみから決まる多様体で，N と K-双リプシッツになるものが存在する」という主張である．したがって，同じエンド不変量を持つ双曲 3 次元多様体 N, N' の間には K^2-双リプシッツ写像が存在することになり，古典的な D. Sullivan の剛性定理により，N とN'は同じ等長型を持つことが示される．特に，N が閉曲面 S と同じホモトピー型を持つとき，リプシッツ定数 K は S のみに依存することも証明されている．
上でも述べたように，研究代表者は，幾何的極限を使いエンディング・ラミネーション予想の別証明を与えたが，その中で，双リプシッツ・モデル定理の証明が占めるのは数ページという非常に簡潔なものである．

目標 1. 幾何的極限の手法を使いブリック型双曲３次元多様体（無限生成基本群をもつ場合を含む）に関する双リプシッツ・モデル定理を証明する．

目標 2. 目標 1 の結果を使い，幾何的に有限な双曲３次元多様体の幾何的極限を位相的・幾何的観点から完全に分類する．（大鹿氏との共同研究）

双曲 3 次元開多様体 N が曲面型でない場合は，双リプシッツ定数 K は一様ではなく，

N のエンド不変量に依存する．このままでは，双曲 3 次元開多様体の列 $\{N_n\}$ の幾何的極限を解析するのに不便である．したがって，既存の双リプシッツ・モデル定理を直接的に使って「稠密性予想」の別証明するのは難しいことが予想される．

目標 3. 曲線グラフの強張測地半直線に同伴する幾何的に有限な双曲 3 次元開多様体の列 $\{N_n\}$ に関しては，双リプシッツ定数は一様に取れることを証明する．本目標達成後は，この主張を「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」を呼ぶことにする．

目標 4. 漸近一様双リプシッツ・モデル定理を使って，「漸近稠密性予想」を証明する．

３．研究の方法

最初に，本研究課題で中心的な役割を果たす「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」を，幾何的極限と最小面積曲面の手法を利用して証明する．次に，この定理を使って「ブリック多様体に関する双リプシッツ・モデル定理」,「幾何的極限の位相的・幾何的分類定理（特にその一部として幾何的極限多様体に関するエンディング・ラミネーション定理を含む)」,「漸近稠密定理」を証明し．
最終的に，位相的クライン群論の諸結果を統一的に説明する理論を完成する．

「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」の対象となる双曲 3 次元開多様体 N は，圧縮可能な単純退化エンド e を持つ場合も含まれる．必要ならば，e に対応する N の被覆空間をとることにより，問題を N が可縮体 (compression body) の場合に帰着できる．e の N における近傍は $S\times\mathbf{R}$ の位相型をもつ．このとき，H. Masur-Y. Minsky (1999) により，曲線グラフ $C(S)$ は Gromov 双曲的構造をもつ．さらに，E. Klarreich (1999) の結果により，$C(S)$ の無限遠境界は，エンディング・ラミネーションとして実現できるラミネーション全体からなる空間 $EL(S)$ と同一視できる．e のエンディング・ラミネーションを $\mu\in EL(S)$ とする．このとき，$C(S)$ 内に基点 v_0 を決め，v_0 と μ をつなぐ強調測地半直線 $\{v_n\}$ を考える．N_n として，N と同相な幾何的有限双曲多様体で，e に対応する N_n の無限遠境界 $\partial_e N_n$ の等角構造（双曲構造）に関し，v_n は長さ L 以下の閉測地線として実現できるものを考える．ただし，L は S の位相構造のみによる一様定数である．「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」とは，「このような列 $\{N_n\}$ に対し，エンド不変量のみから決まるブリック多様体の列 $\{M_n\}$ が存在し，各 M_n は，N_n と，双リプシッツになる」という主張である．ここで最も重要なのは，双リプシッツ定数 K として，n に依存しないものがとれるということである．この定理を証明するとき，Minsky の「一様有界長定理」の一般化が必要である．B. Bowditch (2007) は，この定理を幾何的に証明した．しかしそれでは不十分なので，研究代表は幾何的極限の議論が，一般化には不可欠であると考えている．さらに，研究代表者(2006)が証明した，N_n のエンドを非圧縮化した，$\mathrm{CAT}(-1)$-多様体内での線織包曲面(ruled wrapping)の存在定理も必要である．この曲面は，双曲多様体におけるプリーツ状曲面に対応する役目を担う．さらに，M_n から N_n へのリプシッツ写像 f_n を双リプシッツ写像に置き換えるには，M_n のブリック間のジョイント F に f_n を制限した $f_n|_F$ をホモとピーで動かして幾何的に一様な埋め込みに変形する必要がある．これは，Freedman-Hass-Scott (1983) による最小面積論の議論を使って証明する．このとき，M_n から境界ブリックを除いた M_n^{inn} は，$M_n^{\mathrm{inn}}\subset M_{n+1}^{\mathrm{inn}}$ をみたす．したがって，$\{M_n\}$ の幾何的な極限 M_∞ は，$\cup_n M_n^{\mathrm{inn}}$ に境界ブリックを加えたものとなるので，$\{N_n\}$ の幾何的極限 N_∞ は，M_∞ と K-双リプシッツとなる．一方，このようにして定義された双曲多様体 N_n のホロノミー $\rho_n:\pi_1(N)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の列は，J. Morgan-P. Shalen (1984, 1988) 等の一連の結果により，代数的に収束する極限をもつことが分かる．しかし基礎になる Morgan-Shalen の結果等は，$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-表現に関するものなので，そのままでは $\mathrm{CAT}(-1)$-多様体のホロノミー表現には一般化できない．研究代表者は，彼らの結果を幾何的極限を使って別証明を与えた M. Bestvina (1988) や F. Paulin (1988) の結果が有効であると考えている．

位相的クライン群論の統一的理論を構成するため，最初の計画で得られた「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」を実際にいろいろな問題に適用していく．

漸近稠密性定理：稠密性予想とは，「任意の有限生成クライン群は，幾何的有限なクライン群の代数的極限である」という主張である．この予想は，様々な部分解が出た後，最終的に研究分担者の大鹿健一氏によって肯定的に解決された．大鹿氏の手法は，与えられたクライン群 Γ と同じエンド不変量をもつクライン群 Γ' で幾何的有限クライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ の代数的極限となるものを構成することにある．このとき，エンディング・ラミネーション予想の解決により，Γ と Γ' が $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-共役なことがいえるので，稠密性予想が得られたことになる．しかし，大鹿氏の証明はそれほど簡単ではない．一方，「漸近一様双リプシッツ・モデル定理」が完成すれば，幾何的有限双曲多様体の列 $\{\Gamma_n\}$ を本研究で得られるようにとると，$N=\mathbf{H}^3/\Gamma$ が $\{\Gamma_n\}$ の代数的極限であることは，直接的な系として証明できる．

ブリック型双曲多様体に関するエンディング・ラミネーション定理：一般に，ブリック多様体 M の基本群は無限生成であり，位相的にテームでない（したがってエンド不変量が定義できない）無限個のエンド（これをワイ

ルドエンドという）を含む．この場合も，M 内のブリック分解されない部分がコンパクトであれば，Mと同相な双曲多様体 N に対して，エンディング・ラミネーション定理が証明できる．ただし，このとき N のエンド不変量とは，位相的にテームなエンドに関するエンド不変量の集合を意味し，ワイルドエンドに関する不変量は必要としない．

幾何的極限多様体の分類：同じ位相型をもつ双曲多様体の列 $\{N_n\}$ の幾何的極限として得られる双曲多様体 N を位相的および幾何的に分類する．大鹿氏との共同研究で，N_n が曲面型のとき，この分類はすでに完成している．幾何的分類をするとき，幾何的極限 N_∞ が上の条件をみたすようなブリック型双曲多様体に同相になるという位相的な性質を本質的に使う．

４．研究成果

(1) 本研究課題である幾何的に有限なクライン群の幾何的極限の分類は，大鹿健一氏（大阪大学教授）との共同研究で，完全に解決した．特に，幾何的極限クライン群による 3 次元双曲空間の商空間である双曲多様体の位相型が全て明らかになった．一般にこのような幾何的無限多様体は，有限個の幾何的有限エンド，無限個の幾何的無限テーム・エンド，無限個のワイルド・エンドを同時に持ち得ることをが分かった．しかし，このような複雑さにもかかわらず，幾何的有限クライン群を実現する多様体の中に，幾何的極限クライン群を位相的に埋め込めることも証明できた．さらに，Minsky のエンディング・ラミネーション定理に対応する剛性定理が，幾何的極限多様体でも成立することが分かった．これらの成果は，以下の 2 編の論文にまとめた．

K. Ohshika and T. Soma, Geometry and topology of geometric limits I，投稿中

T. Soma, Geometric limits and length bounds on curves, Tokyo J. Math. 34 (2011) 203-219.

(2) 本課題研究で得られた双曲幾何的手法を用いて，幾何構造を持つ 3 次元幾何多様体に対する Sma1e 予想へのアプローチが可能なことが分かった．特に，双曲軌道面を底空間としてもつ Seifert 多様体に関して，Smale 予想が成り立つことが証明できた．すなわち，このような多様体の恒等成分のホモトピー型と，微分同相群の恒等成分のホモトピー型が一致することが分かった．微分位相群は無限次元多様体であるので，その構造を調べるのには困難がともなう．しかし，上記の多様体に関する Smale 予想の解決により，微分同相群のホモトピー型だけでなく位相型も決定することができた．この手法をさらに一般化して，infranil 構造を持つ 3 次元多様体に関する Smale 予想を解決することが今後の目標である．この成果の一部は，以下の論文で発表した．

D. McCullough and T. Soma, The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with hyperbolic base orbifold, J. Differential Geom. 93 (2013) 327-353.

(3) 研究分担者の大鹿氏は，エンディング・ラミネーション定理を利用して，クライン群論の重要な未解決問題であった「稠密性予想」を完全に解決した．この結果は，以下の 2 編の論文で発表した．

K. Ohshika, Constructing geometrically infinite groups on boundaries of deformation spaces, J. Math. Soc. Japan 61 (2009) 1261–1291.

K. Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups, Geom. Topol. 15 (2011) 827–890.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① D. McCullough and T. Soma, The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with hyperbolic base orbifold, J. Differential Geom.，査読有，Vol. 93 (2013) 327-353.
http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1361800869

② S. Kiriki and T. Soma, Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps, Ergodic Theory Dynam. Sys.（査読有）Vol. 33 (2013) 1029-1051.
DOI: 10.1017/S0143385712000168

③ S. Kiriki and T. Soma, C^2-robust heterodimensional tangencies, Nonlinearity（査読有）Vol. 25 (2012) 3277-3299.
DOI: 10.1088/0951-7715/25/12/3277

④ T. Soma, Recent topics on topological Kleinian group theory, Sugaku Expositions Amer. Math. Soc.（査読無）Vol. 25 (2012) 65-88.

⑤ T. Soma, Geometric limits and length bounds on curves, Tokyo J. Math.（査読有）Vol. 34 (2011) 203-219.
DOI: 0.3836/tjm/1313074451

⑥ K. Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups, Geom. Topol.（査読有）Vol. 15 (2011) 827–890.
DOI: 10.2140/gt.2011.15.827

〔学会発表〕（計 5 件）

① 相馬輝彦，Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps，日本数学会秋期総合分科会・トポロジー分科会，9 月 21 日，2012 年，九州大学

② 相馬輝彦，Diffeomorphism groups of aspherical 3-manifolds，Low-dimensional

Geometry and Topology, 9 月 14 日, 2012 年, 東京工業大学
③ 相馬輝彦, Insulator condition for Fuchsian orbits, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 1 月 8 日, 2012 年, 名古屋大学
④ T. Soma, The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with hyperbolic base orbifold, ICM Satellite Conference: Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, 8 月 11 日, 2010 年, Nat'l Univ. of Singapore, Singapore
⑤ 大鹿健一, クライン群の変形空間の位相構造, 日本数学会秋期総合分科会・幾何学賞受賞特別講演, 9 月 19 日, 2012 年, 九州大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等：
http://www.comp.tmu.ac.jp/trhksoma/

６．研究組織
(1)研究代表者
相馬 輝彦（SOMA, Teruhiko）
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：５０１５４６８８

(2)研究分担者
大鹿 健一（OHSHIKA, Ken'ichi）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：７０１８３２２５

(3)連携研究者
なし