

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：23903

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540093

研究課題名（和文）閉曲面上の結び目の安定同値類の構造と不変量の研究

研究課題名（英文）THE RESEARCH OF THE STRUCTURES AND INVARIANTS OF STABLE EQUIVALENCE CLASSES OF KNOTS IN THICKENED SURFACES

研究代表者

鎌田 直子（KAMADA NAOKO）

名古屋市立大学・その他の研究科・教授

研究者番号：60419687

研究成果の概要（和文）：閉曲面上の結び目の安定同値類(twisted knot)の不変量であるカンドルを導入して幾何学的解釈を行った。また、twisted knot の不変量である多変数多項式および index 多項式を導入し、twisted knot の分類に有効である事を示した。さらに、twisted knot の分類表を出力するコンピュータプログラム、不変量を計算するプログラムを作成して分類表を作成した。

研究成果の概要（英文）：We defined the quandles of the stable equivalence classes of knots in thickened surfaces (twisted knots) and gave the geometric interpretation of the quandles of twisted knots. We also introduced the multivariable polynomial invariants and the index polynomials of twisted knots and showed that they are useful to distinguish twisted knots. We coded the computer programs to makes the list of twisted knot diagrams and to calculate the invariants of twisted knots. Using the programs, we constructed the table of twisted knots.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1000000	300000	1300000
2011年度	500000	150000	650000
2012年度	500000	150000	650000
年度			
年度			
総計	2000000	600000	2600000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：位相幾何

## 1. 研究開始当初の背景

閉曲面上の結び目とは、閉曲面上の  $I$  束( $I$  は閉区間)として表される有向 3 次元多様体内の結び目のことである。閉曲面が 2 次元球面の場合、2 次元球面上の  $I$  束内の結び目であり、それは 3 次元球面内の結び目と自然に同一視することができる。一般種数の閉曲面上の結び目(閉曲面上の  $I$  束内の結び目)は 3 次元多様体の研究において重要である。

特に、閉曲面が有向閉曲面であるとき、結び目の安定同値類は「仮想結び目」と自然に同一視されることが知られている。閉曲面を向き付け不可能な曲面まで拡張した場合の結び目の安定同値類に対応するものが、当研究の対象である「twisted knot」である。すなわち、 $\{\text{結び目}\} \subset \{\text{仮想結び目}\} \subset \{\text{twisted knot}\}$  の関係がある。twisted knot の研究成果は結び目および 3 次元多様体の研究に有

用であるとともに、カンドルホモロジーやコバノフホモロジーのねじれ係数版にも自然な解釈を与えることが期待される。

## 2. 研究の目的

当研究では twisted knot に関して、カンドルをはじめとする代数的・幾何的構造とその不変量、多項式不変量を調べ新しい不変量の構築を目指し、twisted knot の分類表の構成を行う。

## 3. 研究の方法

### (1) カンドルをはじめとする代数的・幾何的構造とその不変量の研究

研究代表者は抽象結び目と仮想結び目の対応を利用して結び目群の幾何学的な解釈を行った。この手法を応用して twisted knot と一般抽象結び目(向き付け不可能な場合にも拡張した抽象結び目)の関係に拡張して、カンドル、バイカンドルなどの概念を一般化する。

### (2) 多項式不変量の研究

仮想結び目の多変数多項式不変量などを twisted knot に拡張する。Bourgoin が Jones 多項式を twisted link に拡張した手法を応用する。

### (3) twisted knot の分類表の構成

twisted knot をリストアップするコンピュータプログラムと twisted knot を計算するプログラムを作成する。それらの出力したリストの同値である twisted knot を分類する。

## 4. 研究成果

### (1) カンドルをはじめとする代数的・幾何学構造とその不変量の研究

twisted knot のカンドルを導入した。twisted knot のカンドルは幾何的には twisted knot の 2 重被覆のカンドルに対応する事がわかった。

### (2) 多項式不変量の研究

2009年に宮澤、Kauffman、Dyeに定義された仮想結び目の多変数多項式不変量を twisted knot に拡張し、それと実交点数との関係を Turaev surface を利用して示した。また、カンドルと多変数多項式不変量を利用して任意の2以上の実交点数の仮想結び目と同値でない仮想結び目と同じ性質の Jones 多項式をもつ1成分の twisted knot が存在することを示し、twisted knot diagram の同値類を定める同値変形の関係を示した。仮想結び目の多項式不変量である。Index 多項式は2010年に Im, Lee, Lee が定義した。これは仮想結び目の仮想交点の virtual intersection index

を利用して定義される。この virtual intersection index が実交点の intersection index と等しいことを示した。これによって Index 多項式は実交点の intersection index を利用して定義できることを示した。これにより、twisted knot にも Index 多項式の定義を拡張することが可能となり、twisted knot の Index 多項式を定義することに成功した。この拡張 Index 多項式を用いて、twisted knot の Jones 多項式では判別できない2つの twisted knot を判別することができた。さらに、Index 多項式の精密化を行った。twisted knot を表す閉曲面上の knot diagram の中で、その曲面の中で最小の(オイラー)種数を安定同値類の最小種数と呼び、これを決定することは大きな課題である。2005年に Jones 多項式をもとに surface state model (link diagram から導かれる曲面上の閉曲線の集合)を利用して surface bracket 多項式を Dye、Kauffman が導入した。さらに彼らは surface state model と knot diagram の種数の関係を示していた。この手法を応用して、twisted knot の多変数多項式をもとに surface bracket 多項式を導入し、この surface state model の閉曲線と多変数多項式の変数の関係を明らかにした。

### (3) twisted knot の分類表の構成

twisted knot のリストアップするコンピュータプログラムと多変数多項式不変量と Jones 多項式を計算するコンピュータプログラムを作成しリストを室力した。そのリストから、分類表を構成した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Big uandles with structures related to virtual links and twisted links, J. Knot Theory Ramifications, 査読有, 21巻, 2012, 1240006 1-14  
DOI:10.1142/S0218216512400068

② Naoko Kamada, Polynomial invariants and quandles of twisted links, Topology Appl., 査読有, 159巻, 2012, 999-1006  
DOI:10.1016/j.topol.2011.11.024

③ Mikami Hirasawa, Naoko Kamada, Seiichi Kamada, Bridge presentations of virtual knots, J. Knot Theory Ramifications, 査読有, 20巻, 2011, 881-893

DOI:10.1142/S0218216511009017

- ④ Andrew Bartholomew, Roger Fenn, Naoko Kamada, Seiichi Kamada, New invariants of long virtual knots, *Kobe J. Math.*, 査読有, 27巻, 2010, 21-33
- ⑤ Naoko Kamada, The polynomial invariants of twisted links, *Topology Appl.*, 査読有, 157巻, 2010, 220-227
- ⑥ Atsushi Ishii, Naoko Kamada, Seiichi Kamada, The Miyazawa polynomial for long virtual knots, *Topology Appl.*, 査読有, 157巻, 2010, 290-297

[学会発表] (計 17件)

- ① Naoko Kamada, A surface bracket polynomial based on a multivariable polynomial invariant, E-KOOK セミナー(招待講演), 2013年2月15日, 大阪市立大学
- ② Naoko Kamada, The surface state for the Miyazawa polynomial, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics(招待講演), 2013年1月16日, 東京大学
- ③ Naoko Kamada, サーフェイスブラケット多項式, 2012 琉球結び目セミナー, 2012年9月4日, 那覇市伝統工芸館会議室
- ④ Naoko Kamada, Polynomial invariants and surface bracket polynomials of twisted links, Mini-symposium and special session STS "Knot Theory and its ramifications" at The 6th European Congress of Mathematics (招待講演), 2012年7月5日, Krakow (Cracow), Poland
- ⑤ Naoko Kamada, Surface bracket polynomials of twisted links, Friday Seminar on Knot Theory(招待講演), 2012年6月22日, 大阪市立大学
- ⑥ Seiichi Kamada, Twisted biquandles and invariants of twisted links, 国際会議「The 8th East Asian School of Knots and Related Topics」(招待講演), 2012年1月10日, KAIST, Korea
- ⑦ Naoko Kamada, Index polynomial invariants of virtual knots and twisted knots, 国際会議「The 8th East Asian School of Knots and Related Topics」(招待講演), 2012年1月9日, KAIST, Korea
- ⑧ Naoko Kamada, Index polynomials of twisted links, 「Quantum Topology Seminar / Knots in Chicago」(招待講演), 2011年10月4日, The University of Illinois at Chicago, Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, Chicago, USA
- ⑨ Seiichi Kamada, Virtual knots as double covering of twisted knots, 国際会議「The 19th TAPU Seminar on Knots and

Related Topics」(招待講演), 2011年9月16日, Merak Room, Seacloud Hotel (13F) Haeundae, Busan, Korea

⑩ Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, 国際会議「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」(招待講演), 2011年9月15日, Merak Room, Seacloud Hotel (13F) Haeundae, Busan, Korea

⑪ Naoko Kamada, An interpretation of index polynomials, 国際会議「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」(招待講演), 2011年9月15日, Merak Room, Seacloud Hotel (13F) Haeundae, Busan, Korea

⑫ Naoko Kamada, Index 多項式について, 2011 琉球結び目セミナー, 2011年9月6日, 那覇市伝統工芸館会議室

⑬ Naoko Kamada, On checkerboard colorable twisted links, 国際会議「The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics」(招待講演), 2011年1月10日, 広島大学

⑭ Naoko Kamada, Polynomial invariants and quandles of twisted links, 国際会議「International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications」(招待講演), 2010年9月30日, Universidad de Colima, Colima, Mexico

⑮ Naoko Kamada, On invariants of twisted links and applications, 研究集会「The 2nd TAPU-KOOK Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics」(招待講演), 2010年7月26日, Kyungpook National University, Korea

⑯ Seiichi Kamada, On quandles and biquandles related to twisted virtual links, 研究集会「Knots in Washington XXX: Categorification, Quantum knots and Quantum computing」(招待講演), 2010年5月20日, George Washington University, Washington, DC, USA

⑰ Naoko Kamada, Quandles and multivariable polynomial invariants of twisted links, 研究集会「Knots in Washington XXX: Categorification, Quantum knots and Quantum computing」(招待講演), 2010年5月20日, George Washington University, Washington, DC, USA

[その他]

ホームページ等

<http://www.nsc.nagoya-cu.ac.jp/~kamada/tbltknot.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

鎌田 直子 ( KAMADA NAOKO )  
名古屋市立大学 その他の研究科 教授  
研究者番号 : 60419687

(2)研究分担者

(3)連携研究者

金信 泰造 ( KANENOBU TAIZO )  
大阪市立大学 理学(系)研究科(研究院)  
教授  
研究者番号 : 00152819  
佐藤 進 ( SATOH SHIN )  
神戸大学 理学(系)研究科(研究院)  
准教授  
研究者番号 : 90345009  
宮澤 康行 ( MIYAZAWA YASUYUKI )  
山口大学 理工学研究科 教授  
研究者番号 : 60263761