

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：24402
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540094
 研究課題名（和文） トーリックトポロジーの展開

研究課題名（英文） Development of toric topology

研究代表者

栞田 幹也 (MASUDA MIKIYA)
 大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：00143371

研究成果の概要（和文）：石田、福川との共同研究において、トーリック多様体の正当なトポロジー版と言える位相的トーリック多様体の概念と、扇の概念を一般化した位相的扇の概念を導入し、トーリック多様体と扇との間に 1 対 1 対応があるというトーリック幾何の基本定理を拡張した。また、実トーリック多様体と曲率の関係、旗多様体の GKM グラフのコホモロジーの計算、格子点に関する 12 点定理の拡張などを行った。

研究成果の概要（英文）：With Ishida and Fukukawa, I introduced the notions of a topological toric manifold (a topological generalization of a toric manifold) and a topological fan (a generalization of fan) and showed that there is a bijective correspondence between those objects. This generalizes the fundamental theorem in toric geometry. Besides this, I studied small covers from the viewpoint of curvature, computed graph cohomology of the GKM graph associated to flag manifolds, and established a generalization of the twelve point theorem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

1. 研究開始当初の背景

代表者トーリック多様体論をトポロジーの立場から展開し、トーリックトポロジーという新しい分野の開拓を進めている。これまでトーリック多様体（もっと一般にトーラス多様体）のトポロジーを（多重）扇などを用いて組合せ論の言葉で記述することを主に行ってきた。

2. 研究の目的

研究の目的は以下の 3 点である。

- (1) トーリック多様体の微分同相による分類（特にコホモロジー剛性問題）
- (2) シンプレクティック多様体となる実トーリック多様体（または凸多面体上の small cover）の研究
- (3) 同変シューベルトカリキュラスをトーリックトポロジーの立場から研究し、ト

ーリックトポロジーの枠組みを広げる。

3. 研究の方法

代表者と Choi, Suh はコホモロジー剛性問題に取り組み、部分的肯定的解決を得ている。この共同研究を進めてポット塔に対するコホモロジー剛性問題の肯定的解決を目指す。実トーリック多様体を曲率の観点から調べる。同変シューベルトカリキュラスに関して、GKM理論の観点から研究を始め、勉強会を開催する。

トーリックトポロジーは色々な分野と交錯する分野である。そのような関連する分野の研究者との研究交流を通して自身の研究を進展させるとともに、勉強会や研究集会を開催して若手研究者の育成を計る。

4. 研究成果

(1) トーリック多様体論をトポロジーの立場から展開し、トーリックトポロジーという新しい分野の開拓を進め、これまでトーリック多様体（もっと一般にトーラス多様体）のトポロジーを（多重）扇などを用いて組合せ論の言葉で記述することを主に行ってきた。代数幾何におけるトーリック多様体のトポロジー版として、1990 年頃に導入された Davis-Januszkiewicz による擬トーリック多様体と 2000 年頃に服部・柁田により導入されたトーラス多様体があったが、どちらも一長一短があり、トーリック多様体の正統なトポロジー版とは言い難かった。代表者は、石田、福川との共同研究で、位相的トーリック多様体と位相的扇の概念を導入し、それらの間に 1 対 1 対応が存在することを示し、トーリック幾何の基本定理の拡張を得た。位相的トーリック多様体こそが、トーリック多様体の正当なトポロジー版と確信している。

(2) 石田との共同研究で、擬トーリック多様体が複素構造を持つのはトーリック多様体であることを示し、Buchstaber-Panov の本（2002 年出版）の中で提示された「Davis-Januszkiewicz によって導入された擬トーリック多様体でトーラス群作用で不変な複素構造をもつものでトーリック多様体以外のもは存在するか」という問題を否定的に解決した。なお、この結果は、石田・Karshon による「 T^n 作用をもつコンパクト複素 n 次元多様体が不動点をもつのはトーリック多様体に限る」という決定的な結果へと繋がった。

(3) 実トーリック多様体のトポロジー版として、small cover という多様体があるが、YU、黒木と共同で、正曲率、負曲率、平坦曲率をもつ small cover の特徴づけの研究を行った。

(4) 実トーリック多様体の例として、実ポット多様体がある。実ポット多様体は、1 点からスタートして 2 つの実直線束の Whitney

和の射影化を繰り返し得られる多様体で、リーマン平坦多様体の特別なクラスを構成する。神島氏との共同研究、および、その後の S. Choi, S-i. Oum 氏との共同研究において、実多様体は、 $Z/2$ 係数のコホモロジー環で区別できることを示した。この研究に触発された、J. B. Kim との共同研究で、1 点から出発した iterated S^1 束のトポロジーを研究した。この場合、得られる多様体は平坦多様体に限らないが、それに近い infra-nilmanifold と呼ばれる多様体になることを示した。また、3 次元の場合に完全な分類結果を得た。

(5) トーラス群作用が有効に使われトーリックトポロジーと似た思想をもつ同変シューベルトカリキュラスをトーリックトポロジーの立場から研究した。特に、石田、福川との共同研究で、旗多様体の同変コホモロジーを GKM グラフから全く組合せ論的に求めた。

(6) 平面の格子点の数え上げの定理であるピックの公式、12 点定理の一般化を東谷との共同研究で行った。これらの事実は、トーリック幾何やトーリックトポロジーと密接に関係しており、そのような進んだ数学を使って証明できるが、ここでは、その証明と共に初等的な証明を与えた。

(7) 格子を題材とした本を福川と執筆した。この本は、高校数学から大学数学、そして現代数学へと繋がる啓蒙書である。格子は、トーリック幾何、トーリックトポロジーに現れるが、初学者に馴染み易いので、啓蒙書には適しているのではないかと考えから執筆した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件) 以下すべて査読有

① H. Ishida and Y. Fukukawa, M. Masuda, Topological toric manifolds, Moscow Math. J. 13 (2013), no. 1, 57--98.

② H. Ishida, M. Masuda, Todd genera of complex torus manifolds, Algebraic & Geometric Topology 12 (2012) 1781-1792
DOI: 10.2140/agt.2012.12.1777

③ S. Choi and M. Masuda, Classification of \mathbb{Q} -trivial Bott manifolds, J. Symplectic Geom. 10 (2012), no. 3, 447-461.,

④ Y. Fukukawa, M. Masuda,

Buchstaber invariants of skeleta of a simplex. Osaka J. Math. 48 (2011), 549-582.

⑤ S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, Rigidity problems in toric topology, a survey, Proc. of the Steklov Institute of Math. 2011, Vol. 275, 177-190.

⑥ J.B. Lee and M. Masuda, Topology of iterated S^1 -bundles, Osaka J. Math. (accepted)

⑦ S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, Topological classification of generalized Bott towers, Trans. AMS 362 (2010), 1097-1112.

⑧ S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, Quasitoric manifolds over a product of simplices, Osaka J. Math. vol. 47 (2010), 109-129.

⑨ M. Masuda, Cohomological non-rigidity of generalized real Bott manifolds of height 2, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2010, Vol. 268, pp. 242-247.

⑩ M. Masuda, Symmetry of a symplectic toric manifold, J. Symp. Geom. 8 (2010), 359-380.

⑪ 柘田幹也, トーリックトポロジー, 雑誌「数学」62巻 (2010) 386-411.

[学会発表] (計 10 件)

① M. Masuda, Topological toric manifolds, 研究集会「Toric Geometry」, Oberwolfach (ドイツ) 2012年4月20日

② M. Masuda, Some combinatorics and geometry in toric topology, International Conference Toric Topology and Automorphic Functions, (ハバロフスク, ロシア) 2011年9月5日

③ M. Masuda, Iterated circle bundles, 第3回国際ワークショップ「微分幾何学と幾何解析」, 大阪市大, 2011年3月13日.

④ M. Masuda, Iterated circle bundles, アメリカ数学会, ハワイ大学 (アメリカ), 2011年3月3日

⑤ M. Masuda, Cohomological rigidity problem, topological toric manifolds and face numbers of simplicial cell manifolds, Topological methods in toric geometry, symplectic geometry and combinatorics, Banff (カナダ), 2010年11月9日.

⑥ M. Masuda, Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs, Workshop on Geometry & Topology 2010, Fribourg (スイス), 2010年9月18日.

⑦ M. Masuda, Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs, Group Actions in Topology and Analysis - 4th GAF Conference, Milan 2010, (イタリア), 2010年9月16日.

⑧ M. Masuda, Cohomological rigidity problems in toric topology, The International Conference "GEOMETRY, TOPOLOGY, ALGEBRA and NUMBER THEORY, APPLICATIONS" dedicated to the 120th anniversary of Boris Delone, (ロシア) 2010年8月18日.

⑨ M. Masuda, The root system of a symplectic toric manifold, International Conference on Algebraic and Geometric Topology, Beijing (中国) 2010年6月30日.

⑩ M. Masuda, The root system of a torus manifold, Workshop on Toric Topology and Related Topics, Fudan Univ. (中国), 2010年5月2日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柘田 幹也 (MASUDA MIKIYA)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00143371

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし