

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月3日現在

機関番号：32651

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540098

研究課題名（和文） コクセター群の理想境界における次元解析と鎖回帰集合の力学的構造

研究課題名（英文） Study on boundaries of Coxeter groups and dynamical structure on the chain recurrent set

## 研究代表者

横井 勝弥 (YOKOI KATSUYA)

東京慈恵会医科大学・医学部・教授

研究者番号：90240184

## 研究成果の概要（和文）：

研究課題の中心的な目的である「理想境界における次元解析と鎖回帰集合の力学的構造」への応用を念頭におき、主に写像の位相力学系的考察（非自励離散力学系における回帰性、一様収束列の極限集合の個数と収束先の系の極限集合の周期点の関係、系の列の極限集合は常に収束先の系の鎖回帰集合の部分集合となること、系の列の非遊走集合のボレル測度からみた大きさ）についての基礎的研究を行った。

## 研究成果の概要（英文）：

We study recurrence properties for the non-autonomous discrete system given by a sequence of continuous self-maps on a compact metric space. In particular, our attention is paid to the case when the sequence of maps converges uniformly to a map. We investigate the structure and behavior of a limit set of the sequence by a dynamical property of the limit map. We also create a perturbation of the sequence whose non-wandering set has small measure.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、位相的力学系、次元論、幾何学的群論

## 1. 研究開始当初の背景

J. Cannon や M. Gromov により急速に発展した幾何学的群論とは、組み合わせ群論へのアプローチとして、3次元多様体の発想から生まれた幾何学的手法により無限群論を研究することである。その源となる発想は Dehn の幾何学的アイデアによる曲面群の語の問題を解決した手法により、現在は様々な理論に基づいて研究が進められている。近年の興味ある研究として、Bestvina、Mess、Dranishnikov 達のコンパクト距離空間上のトポロジーの手法を使うことにより、双曲群、コクセター群の構造やその理想境界の位相的研究を挙げることができる。特に先駆的な研究として、M. Davis は「非輪状閉多様体の普遍被覆はユークリッド空間と同相であろう」という予想に関して、コクセター群を幾何学的に捉えたいわゆる Davis 複体（1次元の Cayley グラフの高次元化）といわれるものを構成し、それをもとにして4次元以上について上記予想の反例を構成した。Kapovich 等は連続体理論の手法を使うことにより双曲群やその境界についての分析をし、Sierpinski carpet や Menger curve を境界としてもつ双曲群についての研究を行っている。これらの群が作用する（可縮）複体上のユークリッド的及び双曲的構造や、それらの複体のエンド、理想境界の幾何学のおよび群の作用に関する力学的構造に関する研究、群や複体などの空間の Coarse 的枠組みの中での性質（漸近次元、coarse コホモロジーetc.）などの研究は大変興味深い。これらの基礎となるものは、位相的枠組みのなかで幾何学を行う、非常に複雑ではあるが、規則的な構造をもつ空間における研究の積み重ねにより得られた手法であり、それを積極的に多方面に渡る境界領域において活用することにより展開し発展している研究分野である。

## 2. 研究の目的

本研究においては特に無限コクセター群やその理想境界に現れる空間を取り上げ、(1) 群を幾何学的情報に翻訳したものと捉えることができる理想境界と呼ばれる空間についての幾何学的構造の研究 (2) 群としての構造の研究 (3) その理想境界の群の作用という観点からの力学的構造の研究 (4) 空間の不変量としての位相次元とコホモロジー次元の研究を行うことが本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

幾何学的対象を計算機により視覚化するこ

とにより研究及び作業を迅速かつ効率的に進めた。また他分野との密接な関連のある境界領域的研究のため、広汎な資料収集、図書、研究打ち合わせ、位相幾何学、微分幾何学などの研究集会における成果発表等を有効に活用して研究遂行した。

## 4. 研究成果

### (1) (横井)

① 非自励離散力学系は、通常の離散的力学系の拡張・一般化として捉えることができるが、その力学的振る舞いは全く異なる。特に連続関数列が一様に特定の関数に収束する状況において考察し、極限集合と鎖回帰集合に対象を絞り研究を進め、極限集合が無限や有限集合の場合について、シャルコフスキーの定理の拡張としての構造定理、極限集合は常に極限写像の鎖回帰集合の含まれること、非自励離散力学系の振る舞いが通常の離散力学系と比べて大きく異なることを表す例などを得た。

② 局所的に良質な性質をもつコンパクト距離空間と孤立点上にはアトムが存在しない有限ボレル測度  $\mu$  を考える。一樣距離が定められた自己連続写像空間のほとんど全ての写像について、その鎖回帰集合は  $\mu$ -測度がゼロであることを示した。これらの空間は多様体、メンガー多様体を含んでいることに注意する。グラフ写像への応用として、完全不連結な鎖回帰集合をもつ連続写像たちは、グラフ上の連続写像空間において通有的であることを示した。

### (2) (保坂)

① 有限グラフと simplicial flag complex と、right-angled Coxeter群の間の関係について述べた。この応用として、再構成可能グラフの新しいクラスを与えている。すなわち、homology  $n$ -manifold の flag complex の 1-skeleton から得られる有限グラフは、再構成可能グラフであることを示した。

② Coxeter 群  $W$  が、その Coxeter 系  $(W, S)$  を同型の差を除いて決定するとき、rigid という。Coxeter 群の分類や Coxeter 群の rigidity の判定は大きな未解決問題である。新しい rigid な Coxeter 群のクラスを与えた。これは、D. Radcliffe (2001) の結果の拡張になっている。

③ proper cocompact CAT(0) 空間  $X$  の asymptotic 次元と境界の被覆次元を扱い、 $X$  の asymptotic 次元は、 $X$  の境界の被覆次元よりも常に大きくなることを示した。

④ CAT(0) 空間  $X$  のコンパクト離散鏡映群  $W$  を考えると、 $W$  は Coxeter 群となる。Coxeter 群  $W$  の Davis-Moussong 複体とこの CAT(0) 空間  $X$  の間の類似性を示した。また Coxeter 群  $W$  の parabolic 部分群の境界上の極限集合についていくつかの結果を示した。

⑤ CAT(0) 群が幾何学的に作用する CAT(0) 空間の splitting theorem を示した。

ここでいう “splitting theorem” とは、  
「群が積に分解するとき、群の積の分解に応じて作用する空間も積に分解する」定理のことをいう。歴史的には、D. Gromoll-J. Wolf(1971), H. B. Lawson-S. T. Yau(1972), V. Schroeder(1985), M. R. Bridson-A. Haefliger(1999) による有名な splitting theorem が知られており、本主定理は、その CAT(0) 群・CAT(0) 空間での拡張にあたる。

⑥ CAT(0) 群が、幾何学的に作用する CAT(0) 空間の境界の位相を決定するとき、“rigid” という。C. Croke-B. Kleiner(2000) によって、non-rigid な CAT(0) 群が構成されている。splitting theorem の応用として、「2つの rigid CAT(0) 群の積は rigid となる」ことを得た。

⑦ ユークリッド平面と同相な proper CAT(0) 空間を調べ、その asymptotic 次元は常に 2 となり、その境界はサークルとなることを示した。

(3) (山田)

コンパクトケーラー多様体の正則ベクトル場の性質は詳しく調べられているが、コンパクト擬ケーラー多様体に関して同様の内容についての研究をおこなった。また、リッチ平坦なケーラー多様体の類似の考察のため、リッチ平坦な擬ケーラー多様体が多く存在することを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① Katsuya Yokoi, Recurrence properties of a class of nonautonomous discrete systems, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, 査読有, 印刷中

② Tetsuya Hosaka, Reconstructible graphs, simplicial flag complexes of homology manifolds and associated right-angled Coxeter groups, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, 印刷中

③ Tetsuya Hosaka, On a new class of rigid Coxeter group, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 印刷中

④ Naotsugu Chinen and Tetsuya Hosaka, Asymptotic dimension and boundary dimension of proper CAT(0) spaces, Tsukuba Journal of Mathematics, 査読有, 印刷中

⑤ Tetsuya Hosaka, Parabolic subgroups of Coxeter groups acting by reflections on

CAT(0) spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 査読有, 42 (2012), 1207-1214

⑥ Tetsuya Hosaka, On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 272 (2012), 1037-1050

⑦ Takumi Yamada, Holomorphic vector fields of compact pseudo-Kähler manifolds, Journal of Geometry and Physics. 査読有, 62 (2012), 740-750

⑧ Takumi Yamada, Ricci flatness of certain compact pseudo-Kähler solvmanifolds, Journal of Geometry and Physics. 査読有, 62 (2012), 1338-1345

⑨ Tetsuya Hosaka, On non-sensitive homeomorphisms of the boundary of a proper cocompact CAT(0) space, The University of Tokyo. Journal of Mathematical Sciences, 査読有, 18 (2011), 491--504

⑩ Tetsuya Hosaka, On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures, Tsukuba Journal of Mathematics, 査読有, 35 (2011), 153--160

⑪ Katsuya Yokoi, The size of the chain recurrent set for generic maps on an  $n$ -dimensional locally  $(n-1)$ -connected compact spaces, Colloquium Mathematicum, 査読有, 119 (2010), 229-236

⑫ Naotsugu Chinen and Tetsuya Hosaka, Asymptotic Dimension of Proper CAT(0) Spaces that are Homeomorphic to the Plane, Canadian Mathematical Bulletin, 査読有, 53 (2010), 629--638

[学会発表] (計 8 件)

① 山田拓身, 一般化された旗多様体の不変擬ケーラー構造の指数について, 多様体と幾何構造の融合, 2013年3月6日, 名城大

② 保坂哲也, On structure of CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学および幾何学的トポロジーの現状と諸問題」, 2012年9月27日, 京都大学数理解析研究所

③ 保坂哲也, Topological fractal structures of boundaries of Coxeter groups and CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「力学系とその周辺分野の研究」, 2012年7月11日, 京都大学数理解析研究所

④ 保坂哲也, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups, Rigidity School, Nara 2010/2011, 2011年3月5日, 奈良商工会議所

⑤ 山田拓身, 擬ケーラー多様体上の正則ベクトル場について, 擬リーマン幾何の展開 III, 2010年12月19日, お茶の水女子大学

⑥ 山田拓身, コンパクト擬ケーラー多様体上の正則ベクトル場について, 松江微分幾何学研究集会 2010, 2010年12月11日, 島根大学

⑦ 保坂哲也, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups, 数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用」, 2010年10月13日, 京都大学 数理解析研究所

⑧ 保坂哲也, Coxeter群の rank-one isometry とその境界について, 第45回位相空間論シンポジウム, 2010年6月5日, 大阪府立大学 理学部サイエンスホール

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

横井 勝弥 (YOKOI KATSUYA)  
東京慈恵会医科大学・医学部・教授  
研究者番号：90240184

### (2) 研究分担者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)  
静岡大学・理学部・准教授  
研究者番号：50344908

### (3) 連携研究者

山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)  
島根大学・総合理工学部・准教授  
研究者番号：40403117