

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 24 日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540099

研究課題名(和文) 結び目理論における不変量と局所変形を用いた幾何学的構造の研究

研究課題名(英文) Study of invariants and geometric structures by local moves in Knot Theory

研究代表者

大山 淑之(OHYAMA, Yoshiyuki)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：80223981

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：3次元空間内の円周を結び目という。次元の差が2あるため、結び目は色々な形をとることができる。結び目を平面に射影し、交点の上下の情報を与えたものを正則図とよぶ。正則図が実交点だけでなく、仮想交点を持つ場合、仮想結び目とよばれる。

結び目や仮想結び目の正則図の一部を変形させる操作を局所変形という。2つの結び目や仮想結び目がある局所変形で移りあう場合、必要な局所変形の最小回数は距離となる。本研究は、結び目の局所変形による距離空間内の結び目の位置と結び目不変量との関係や、この距離空間がどの程度の広さを持つかなど、結び目の局所変形による距離空間の性質を研究したものである。

研究成果の概要(英文)：A circle in the 3-dimensional space is called a knot. There exist many kinds of knot since the difference of the dimensions between a knot and a space where a knot exists is two. When we project a knot into the plane and give the over and under crossing information, we have the figure called a knot diagram. A knot whose any diagram has not only real crossings but also virtual crossings is called a virtual knot.

A local move is the operation which changes the local figure into another figure on a knot diagram. If two knots or two virtual knots can be transformed into each other by local moves, the minimal number of necessary local moves can be considered as a metric. We study relations between the positions of knots in the metric space of knots by a local move and knot invariants, and the property of this metric space, for example, the width of the metric space.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目 仮想結び目 局所変形 距離空間 有限型不変量 C_n -move

1. 研究開始当初の背景

結び目理論の目的の一つは、結び目の分類である。分類をおこなうには、同じ型の結び目に対し、同じ値を取る結び目不変量が必要となる。さまざまな多項式不変量が発見され、量子不変量としてまとめられてきた。1990年に Vassiliev 不変量が定義された。結び目不変量全体を階層分けしたものと解釈でき、有限オーダーの Vassiliev 不変量は有限型不変量と呼ばれている。量子不変量に変数変換、テラー展開を施して得られるべき級数の係数が有限型不変量になることが知られている。グラフの3次元空間への埋め込みを空間グラフという。空間グラフに対しても、有限型不変量が定義されている。

Vassiliev 不変量と局所変形との関係を表す Goussarov-Habiro の定理がある。2つの結び目のオーダー n 未満の Vassiliev 不変量が一致する必要十分条件は、その結び目が C_n -move という局所変形で移りあうという定理である。Goussarov と Habiro が独立に示した Goussarov-Habiro の定理は、結び目理論における局所変形の重要性を語っている。 C_n -move で結び目を分類することが、オーダー n 未満の Vassiliev 不変量で結び目を分類することと同じである。Goussarov-Habiro の定理から、 C_n -move はオーダー n 未満の Vassiliev 不変量を変えないが、オーダー n の Vassiliev 不変量は変化させる可能性がある。

2つの結び目がある局所変形で移りあう場合、移しあうために必要な局所変形の最小回数が距離関数の公理を満たし、結び目の集合に距離空間の構造を入れることができる。局所変形ごとに距離空間が決まり、球面等の図形が定義できる。交差交換による距離空間と Delta move による距離空間において、2つの球面の接点に無限個の結び目が存在することが知られている。局所変形による距離空間には、ユークリッド空間のような身近な距離空間には現れないような興味深い現象が現れる。

また、結び目に局所変形によって、結び目の集合に単体的複体の構造を入れることもできる。 $n+1$ 個の結び目が互いにある局所変形1回で移るとき、 n 単体を張ると定義する。交差交換による単体的複体、 C_n -move による単体的複体の性質が調べられている。

結び目の研究に、正則図を用いることが多い。1999年に Kauffman により、結び目の拡張となる仮想結び目の概念が提唱された。結び目の正則図において、実交点だけでなく、仮想交点も有する正則図を仮想結び目正則図と呼ぶ。仮想結び目正則図の一般ライデマイスター移動による同値類を、仮想結び目といい、ガウス図と1対1の対応を持つ。結び目理論の結果がどの程度仮想結び目に拡張することができるのかという視点に立ち、近年仮想結び目の研究が活発に行われつつある。

2. 研究の目的

上記のように、2つの結び目がある局所変形で移りあう場合、移すのに必要な局所変形の最小回数を決定することは、結び目の局所変形による距離空間の研究にとって重要であり、 C_n -move による距離の決定は、Vassiliev 不変量の研究に直結する。

本研究の第1の目的は、 C_n -move による距離を決定するために、1回の C_n -move で具体的な不変量がどの程度変化するか、決定することである。研究開始時点で C_n -move 1回で Conway 多項式の z^n の係数が変化しないか、あるいは ± 2 変化するという結果を得ている。

本研究の第2の目的は、結び目の局所変形による距離空間の特徴を研究することである。距離空間における球面同士の接点や、特別な位置にある結び目の性質など、一般の距離空間では見られない性質を明らかにする。局所変形による結び目の単体的複体の構造についても、その特徴を明らかにする。

空間グラフに対しても、研究代表者等により、有限型不変量が定義されている。グラフの構造から、結び目の有限型不変量とはどのような違いがあるのか研究することが、第3の目的である。

3. 研究の方法

結び目の Vassiliev 不変量や局所変形による距離空間を研究する際、結び目を構成する必要がある。結び目を構成するには、結び目のイメージがしっかり確立されていなければならない。研究分担者や連携研究者との議論を通して、結び目の種類によって、有限型不変量はどのような特徴を持つのか、把握していく。

この研究においては、常に不変量を計算するということが必要となる。Vassiliev 不変量の場合は色々な不変量が関係し、その計算は容易ではない。コンピュータを利用し、結び目不変量の計算ソフトを用いる。

また、研究を進める上で、研究分担者や連携研究者のみならず、結び目理論研究者との交流は欠かせない。結び目や仮想結び目の研究が関西で活発に行われている。関西の結び目理論研究者との研究打ち合わせを頻繁に行う。

研究成果は研究集会、学会、また研究代表者が月に一度開催している東京女子大トポロジーセミナーで発表し、研究成果の発展の可能性を探る。

4. 研究成果

(1) Vassiliev 不変量と密接な関係がある C_n -move による結び目間の距離を C_n -distance という。結び目に C_n -move による距離を入れておく。 C_n -distance が1である2つの結び目 K_1, K_2 を中心とする半径1の球面を考える。 n が3以上の自然数の時、その球面の共通部

分の結び目で K_1 と任意に与えたオーダーまで、Vassiliev 不変量が一致する結び目が無限個存在することを示した。 C_n -distance による結び目の距離空間の現象を調べたことになる。

(2) 2次元の格子点を頂点とし、ユークリッドの距離1の2点を辺で結んだ無限グラフを2次元格子グラフという。局所変形による結び目の2次元格子とは、結び目を頂点とする2次元格子グラフで、2頂点間のグラフ上の距離とその2頂点が表す結び目の局所変形での距離が一致するものと定義する。

n を2以上の自然数としたとき、 C_{2n} -move による結び目の2次元格子が存在することを示した。更に、別の方法で C_{2n+1} -move による結び目の2次元格子が存在することも示した。 C_k -move ($k>3$)による結び目の距離空間に、2次元の格子グラフが等長的に埋め込み可能であることを示したことになる。 C_k -move による結び目の距離空間が2次元の広さをもつことがわかった。

(3) 結び目の局所変形 M による Gordian 複体とは、頂点集合が結び目からなり、 $n+1$ 個の結び目が互いに局所変形 M による距離が1であるとき、 n -単体を張ると定義される単体的複体のことである。実交点だけでなく、仮想交点も持つ結び目正則図を仮想結び目正則図といい、一般 Reidemeister move による仮想結び目正則図の同値類を仮想結び目という。実交点を仮想交点へ変える局所変形を v -move とよぶ。 v -move は仮想結び目における結び目解消操作である。結び目の Gordian 複体の概念を仮想結び目へ拡張し、仮想結び目の v -move による Gordian 複体に対して、以下の結果を示した。 n を任意に与えた自然数とする。仮想結び目の v -move による Gordian 複体の任意の 0 -単体に対して、その 0 -単体を部分複体としてもつ n -単体が存在する。仮想結び目に対して、ある幾何構造を与え、その特徴の一つを見出したことになる。

(4) 仮想結び目において、forbidden move と呼ばれる局所変形があり、forbidden move は結び目解消操作である。(3)の研究において、 v -move を forbidden move に変え、(3)と同様の結果を得た。即ち、仮想結び目の forbidden move による Gordian 複体の任意の 0 -単体に対して、その 0 -単体を部分複体としてもつ n -単体が存在することを示した。

(5) 仮想結び目の局所変形の研究は始まったばかりであり、局所変形自身に関する研究をおこなった。仮想結び目に、odd writhe と呼ばれる不変量がある。一般の結び目では、0の値しかとらない仮想結び目特有の不変量である。2つの仮想結び目の正則図が $3T$ -move と一般ライデマイスター移動で移りあうための必要十分条件は、その2つの仮想

結び目の odd writhe が一致することであるという結果を得た。ある局所変形で、仮想結び目の正則図が移りあうというのは、幾何的な条件である。幾何的な条件と代数的条件が同値であるという定理を得ることができたことになる。

(6) 任意の2つの仮想結び目正則図は、交差交換で移りあうとは限らない。仮想結び目表示が交差交換で移りあうとき、その仮想結び目は homotopic であるという。仮想結び目の homotopy class の交差交換による距離空間を考える。 n 次元ユークリッド空間の格子点を頂点とし、ユークリッドの距離が1の2点を辺で結んだ無限グラフを n 次元格子グラフと呼ぶ。仮想結び目の局所変形 M による n 次元格子とは、頂点が仮想結び目をあらわし、2つの頂点のグラフでの距離が局所変形 M による距離に一致する n 次元格子グラフのこととする。ここで、頂点のグラフでの距離とは、2つの頂点を結ぶ最短パスの辺の数を意味する。仮想結び目における n writhe と呼ばれる不変量を用いて、以下の結果を得ることができた。任意に与えられた自然数 N と仮想結び目 K に対して、 K を頂点とする交差交換による N 次元格子が存在する。仮想結び目の homotopy class の交差交換による距離空間が部分空間として、 N 次元格子を含むことになり、この空間が限りなく大きなものであることがわかる。

(5)の結果は吉川真由氏との共同研究であり、(3)は東京女子大の堀内澄子氏と他2名、合計4名による共同研究である。他の結果は堀内澄子氏との共同研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama,
The Gordian complex of virtual knots by
forbidden moves, Journal of Knot
Theory and its Ramifications, Vol.22,
1350051(11pages), 2013, 査読あり
DOI: 10.1142/S021821651350051X

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama,
A two dimensional lattice of knots by
 C_{2m} -moves, Mathematical Proceedings of
the Cambridge Philosophical Society,
Vol.155, pp 39-46, 2013, 査読あり
DOI:10.1017/S0305004113000017

Sumiko Horiuchi, Kasumi Komura,
Yoshiyuki Ohyama and Masafumi
Shimozawa, The Gordian complex of
virtual knots, Journal of Knot Theory

and its Ramifications, Vol.21, 1250122(11pages), 2012, 査読あり
DOI: 10.1142/S0218216512501222

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama,
On the C_n -distance and Vassiliev
invariants, Journal of Knot Theory and
its Ramifications, Vol.21,
1250097(22pages), 2012, 査読あり
DOI: 10.1142/S0218216512500976

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama,
A numerical invariant for two
component spatial graphs, Journal of
Knot Theory and its Ramifications,
Vol.19, pp1125-1134, 2010, 査読あり

[学会発表](計 11件)

堀内澄子、大山淑之、A lattice of
virtual knots by crossing changes、日
本数学会春期年会、2014年3月15日、
学習院大学

堀内澄子、大山淑之、A lattice of
virtual knots by crossing changes、研
究集会「結び目の数学VI」, 2013年12月
18日、日本大学文理学部

吉川真由、大山淑之、A writhe of a
virtual knot and a local move、研究集
会「結び目の数学V」, 2012年12月24日、
早稲田大学

堀内澄子、大山淑之、The Gordian complex
of virtual knots by forbidden moves、
日本数学会春期年会、2012年3月26日、
東京理科大学

堀内澄子、大山淑之、A two dimensional
lattice of knots by C_n -moves、日本数
学会春期年会、2012年3月26日、東京
理科大学

堀内澄子、大山淑之、The Gordian complex
of virtual knots、研究集会「結び目の
数学IV」, 2011年12月24日、東京女子
大学

堀内澄子、大山淑之、A two dimensional
lattice of knots by C_n -moves、The 3rd
TAPU-KOOK joint seminar on knots and
related topics、2011年7月27日、大
阪市立大学

堀内澄子、大山淑之、Intersection of two
spheres in the metric space of knots by
 C_n -moves、研究集会「結び目の数学III」,
2010年12月22日、日本大学

堀内澄子、大山淑之、Intersection of two
spheres in the metric space of knots by
 C_n -moves、日本数学会秋季総合分科会、
2010年9月22日、名古屋大学

堀内澄子、大山淑之、A two dimensional
lattice of knots by C_{2n} -moves 日本数
学会秋季総合分科会、2010年9月22日、
名古屋大学

堀内澄子、大山淑之、A two dimensional
lattice of knots by C_{2n} -moves、研究集
会「E-KOOK セミナー2010」2010年8月
27日、大阪市立大学

[その他]

ホームページ等

home page: <http://lab.twcu.ac.jp/ohyama/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大山 淑之 (OHYAMA, Yoshiyuki)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号: 80223981

(2) 研究分担者

新國 亮 (NIKKUNI, Ryo)
東京女子大学・現代教養学部・准教授
研究者番号: 00401878

(3) 連携研究者

中西 康剛 (NAKANISHI, Yasutaka)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 70183514

谷山 公規 (TANIYAMA, Kouki)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号: 10247207

(4) 研究協力者

堀内 澄子 (HORIUCHI, Sumiko)
東京女子大学・現代教養学部・研究員
研究者番号: 40572144