様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　６ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４０１００

研究課題名（和文）特異点を許容する曲面の微分幾何的研究とその応用

研究課題名（英文）Differential geometric research on surfaces admitting singularities and its application

研究代表者
國分　雅敏（Kokubu, Masatoshi）

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：５０２８７４３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：定曲率空間の微分幾何学的に良い性質をもつ特異点付き曲面について研究した．（非ユークリッド的な定曲率空間では，我々の‘常識’を超えた興味深い現象が数々起こる．）双曲型空間の線型ワインガルテン曲面について，大域的表現公式，特異点の判定条件，および（余）向き付け可能性に関する結果を得た．また，ドゥ・ジッター空間内のCMC-1 面およびローレンツ・ミンコフスキー空間内の極大面についても（余）向き付け可能性に関する結果を得た．ドゥ・ジッター空間内のエンドが二つのCMC-1 面の分類や，双曲型空間内のエンドが３つのCMC-1 曲面の研究成果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied surfaces admitting singularities in some kind of three-dimensional manifolds of constant curvature, requiring them to have good properties from the differential-geometric viewpoint. (Note that non-Euclidean space of constant curvature have interesting features beyond our common sense.) Concerning linear Weingarten surfaces in hyperbolic space, we had a global representation formula, criterion for the shape of singularities, and a result on the orientability and the co-orientability. Concerning CMC-1 faces in de Sitter space and maxfaces in Lorentz-Minkowski space, we had results on the orientability and the co-orientability. At the same time, the classification of CMC-1 faces having two ends were obtained, and the classification of maxfaces having three ends were obtained.

研究分野：微分幾何学とくに曲面論

キーワード：微分幾何　平均曲率　ガウス曲率　特異点

１．研究開始当初の背景

微分幾何的に良い性質をもつ曲面の大域的研究においては，実はその大域的な例すらまれであることがしばしばある.（例えば,「３次元ユークリッド空間において，完備な平坦曲面は柱面に限る，完備な負の定曲率曲面は存在しない」等.）しかし，曲面に特異点を許容することにより，豊富に例が存在し，ひとつ広がった世界が現れることもまた事実である．３次元双曲型空間において平坦波面と呼ばれる特異点を許容した曲面について，研究代表者國分は連携研究者の梅原雅顕氏（東京工業大学大学院情報理工学研究科教授），山田光太郎氏（東京工業大学大学院理工学研究科教授）と２００３年頃から共同研究を始め，その後も継続的に取り組んでいた．また，本課題に着手する以前にも，３次元双曲型空間の線形ワインガルテン曲面と呼ばれる平坦波面を含む曲面のクラスに対し，それらの表現公式，分類や特徴づけ，およびエンドの形状などについて研究を行っていた．（波面（wave front）とは，大雑把に言えば，波面自身は特異点を許容するが，その特異点上でも単位法ベクトルが生き残っており，単位法ベクトル場が単位法バンドルの切り口として，そのバンドル内の特異点をもたない曲面となるようなもの，を意味する.）波面は特異点論の専門家により特異点論の立場から研究されていたが，微分幾何的なアプローチによる研究は我々の研究以外には見当たらなかった．その意味において，本研究開始当初は特異点付き曲面（とくに波面）の現代的な微分幾何的アプローチによる研究が創成期を終え成長期にあったように思う．その一方で，特異点を持たないというカテゴリーでは，J. A. Galvez, A. Martinez, F. Milan 達や P. Roitman による双曲型空間の平坦曲面の研究が知られていた．彼らの興味はプラトー問題等，解析的な方面にあったようで，研究代表者らの目標とする特異点をもった曲面の大域的研究とは方向性が違うように見受けられた．そのような意味で，この研究課題について取り組むにあたり，既存の研究とは趣を異なるもの，新たな研究分野の提唱，また我々の先行研究の深化を念頭に置いて取り組みたいと思っていた．

２．研究の目的

１．に記載した背景のもと，研究代表者の研究対象である３次元双曲型空間内の H－1 と K が比例関係にある線型 Weingarten 曲面(以下，単に HLW 曲面）の研究を足がかりに，（ここで H は平均曲率，K は Gauss 曲率を表す）最終的には，任意の定曲率空間において特異点を許容する曲面（とくに波面）を組織的に研究し，その普遍的な理論を構築することを目的とした．

（１） ３次元双曲型空間内の HLW 曲面の微分幾何的基礎研究および微分位相幾何的発展的研究：

HLW 曲面全体は，CMC-1 曲面（平均曲率が一定値１の曲面）や平坦曲面を含むクラスをなす．CMC-1 曲面や平坦曲面は，３次元双曲型空間の曲面論で比較的よく研究されている対象であった．簡単に確かめられる興味深い性質として，この HLW 曲面の平行曲面は再び同種の HLW 曲面となることが挙げられる．このとき一般に，その平行曲面には特異点が生じ，波面(front) となる．したがって，この場合も波面のカテゴリーで，すなわち，HLW 波面を考えるのが自然である．HLW 波面に関して既にいくつかの先行結果があったが，まだなすべき課題がいくつかあった為，具体的に次の目標を立てた．

① ３次元双曲型空間内の HLW 波面に関する大域的微分幾何学
HLW 波面の向き付け可能性に関する問題，完備性などの仮定のもとで，低い次数の Gauss 写像をもつ HLW 波面の分類や Gauss 写像の値分布の研究などに取り組む．

② HLW 波面にあらわれるエンドの形状の解明
１点穴明きのエンドと円環状のエンドの２種類が現れることが分かっていた．しかし，１点穴明きのエンドでも更に，正則エンド・非正則エンドに分類され，円環状エンドでも，特異点が集積するものもあるなど，CMC-1 曲面や平坦波面のときよりも複雑にふるまうことが，実例で分かっていた．そこで，より理論的にエンドの振る舞いを解明することを目標とした．

③ HLW 波面にあらわれる特異点の位相的形状の解明
知られている実例から, generic には カスプ状曲面’や‘ツバメの尾’と呼ばれる特異点が現れることが予想されていた．既に得られている判定方法の応用で解決されることが期待された．

（２） 他の定曲率空間の特異点つき曲面への一般化や応用：

定曲率空間の曲率を c とすると，H＋c と K が比例するような Weingarten 曲面が上述の HLW 曲面の一般化にあたる．そのような曲面に対しても上述の研究手法の応用もしくは類似の考察ができるものと予想された．ここまで，一般化すると，３次元 Euclid 空間の極小曲面，３次元球面内の平均曲率一定曲面，平坦曲面も含み，古くからそして現在も盛んに研究されている対象を非常に多く含むこととなる．また，余次元を上げた場合や，定空間が不定値計量を持つ場合への一般化などの一般化のアイデアがあった．

３．研究の方法

日常的な研究活動は，研究代表者・連携研究者の各々が研究テーマに関連する論文・文献等を調査し，それらを正確に理解すること，

問題点の抽出，問題解決，新たな問題テーマを発見することであった.（必要な図書等は予算「物品費」により購入した.）その上で，研究代表者は連携研究者とのディスカッションやセミナーの機会を設け，各々が得た研究成果をお互いに発表し検証・討議した.

また，成果発表や専門知識を得るために，学会やシンポジウム，いくつかの研究集会にも参加した.（「旅費」により出張することができた.）その際，多くの研究者とディスカッションを持つことができた.

各連携研究者との活動を簡単に報告する.

梅原氏，山田氏とは，不定期であったが，平均すると年間にトータルで十日前後の割合でセミナーを行い，研究上の疑問点，新たな問題等の抽出を行った．また，他の連携研究者である Wayne Rossman 氏，藤森祥一氏らを交えたセミナーも年に数回開き，意見交換・問題討議，そして論文執筆の打ち合わせといった実質的な取り組みも行った.

山本欧氏は，氏の開発した可視化ツール「ボリュームディスプレイ」（光の残像を利用して実際に３次元空間にグラフィクスを描画するもの）を用いて，いくつかの特異点つき曲面の描画を行った．それは特異点の形状，平行曲面をとったときの振る舞い等の理解に役立った.

４．研究成果

（１）　BLW 波面の向き付け可能性，余向き付け可能性について：
特異点つき BLW 波面がカスプ状曲面もしくはツバメの尾と呼ばれる曲面に局所微分同相となるか否かの判定条件を与えた. また, BLW 波面の向き付け可能性・余向き付け可能性について，最終的な結論を得ることができた．また，3 次元 de Sitter 空間の CMC-1 面についても，それが向き付け可能かつ余向き付け可能であるという結論を得ることができた. そして, 3 次元 Lorentz-Minkowski 空間の極大面が余向き付け可能であることも示すことができた.

（２）　CMC-1 トライノイドについて：
三次元双曲型空間の完備，種数０，３つの正則エンドをもつ CMC-1 曲面で，可約なものについて分類を与えることができた. 既約なものについては既に知られていたので，それと併せて最終的な分類がなされたこととなる.

（３）　拡張された双曲型計量について：
Riemann 面上の拡張された双曲型計量と呼ばれる計量の定義を与え，いくつかの基本的な性質を示した．例えば，計量自身に余向きづけ可能性が定義されること，計量に関する孤立特異点の正則性, 発散点における計量の完備性などを示した．そして 3 次元 de Sitter 空間の CMC-1 面と Riemann 面上の拡張された双曲型計量の一対一対応を示した．その対応の下で，いくつかの性質の伝搬性について結果を得た．具体的には，3 次元 de Sitter 空間の CMC-1 カテノイド（弱完備，種数０，２つの正則エンドをもつ CMC-1 面）の分類や球面上の高々２つの正則特異点をもつ拡張された双曲型計量の分類を行った.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Ou Yamamoto and Masatoshi Kokubu, Visualization of Tangent Developables on a Volumetric Display, Joint Proceedings of the MathUI, OpenMath and ThEdu Workshops and Work in Progress track at Conferences on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2014), Coimbra, Portugal, July 7-11, 2014. ONLINE: http://ceur-ws.org/Vol-1186/

② Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and spacelike CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, Recent Trends in Lorentzian Geometry, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol.26 (2013), 1–47

③ Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, CMC-1 trinoids in hyperbolic 3-space and metrics of constant curvature one with conical singularities on the 2-sphere, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., Vol.87, No.8 (2011), 144–149

④ Masatoshi Kokubu, Linear Weingarten surfaces in hyperbolic three-space, “International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields, edited by K. Sekigawa, V.

Gerdjikov,Y. Matsushita and I. Mladenov", AIP Conference Proceedings 1340 (2011), American Institute of Physics, 58–65

⑤ Masatoshi Kokubu and Masaaki Umehara, Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces, Math. Nachr., Vol.284, No.14–15 (2011), 1903–1918

⑥ 國分雅敏, On horospherical linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space, 数理解析研究所講究録, 1707巻, (2010), 111--124

〔学会発表〕（計４件）

① Masatoshi Kokubu, Linear Weingarten surfaces in a space form, 2014 年 9 月 15–20 日, Opening Workshop Transformation and Singularity", (ウィーン工科大学, オーストリア)

② 國分雅敏, Bonnet 問題に関する一考察, 2013 年 12 月 26, 27 日, 山口幾何学研究集会 2013「進展する曲面論– Advances in Surface Theory –」, (山口大学　理学部)

③ Masatoshi Kokubu, (Co)orientability of horospherical linear Weingarten fronts, 2011 年 2 月 14 – 18 日, Spanish-Japanese Workshop on Differential Geometry', (Granada University, Granada, Spain)

④ Masatoshi Kokubu, Linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space, 2010 年 9 月 13 – 17 日, '10th International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields' (Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
國分　雅敏（KOKUBU, Masatoshi）
東京電機大学・工学部・教授
研究者番号：50287439

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
梅原　雅顕（UMEHARA, Masaaki）
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号：90193945

山田　光太郎（YAMADA, Kotaro）
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10221657

ラスマン　ウェイン（ROSSMAN, Wayne）
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50284485

藤森　祥一（FUJIMORI, Shoichi）
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：00452706

山本　欧（YAMAMOTO, Ou）
東京電機大学・工学部・教授
研究者番号：20291700

入江　博（IRIE, Hiroshi）
東京電機大学・未来科学部・准教授
研究者番号：30385489