

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月30日現在

機関番号：32670

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540101

研究課題名（和文）自明結び目のアーク表示をほどくためのクロムウェル変形の回数

研究課題名（英文）The number of Cromwell moves needed for unknotting an arc-presentation of the trivial knot

研究代表者

林 忠一郎（HAYASHI CHUICHIRO）

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：20281321

研究成果の概要（和文）：結び目は3次元空間内の輪である。どんな結び目も全ての頁をバラバラに開いた本の形の図形上に各羽根との交わりが1本のアーク（曲線分）になるように配置でき、それをアーク表示と呼ぶ。連続的に動かして平面に乘せられるのが自明結び目である。自明結び目は最小2本のアークでアーク表示される。自明結び目の n 本のアークのアーク表示で、マージ変形でアークの本数を減らすまでに、本数を変えないエクステンジ変形が n の1次式回必要な具体例を構成した。

研究成果の概要（英文）：A knot is a circle in the 3-dimensional space R^3 . Every knot can be placed in a figure in the form of an open-book (a book opened so that every adjacent pair of pages are tangent to each other only in the binding) so that it intersects every page in a single arc. We call such a placement of a knot an arc-presentation. A knot is called trivial if it lies in a plane after being moved continuously. The trivial knot has an arc-presentation with two arcs. An example of infinite sequence of arc-presentations with n arcs of the trivial knot as below is given. They need linearly many exchange moves not changing the number of arcs with respect to n until they admit a merge move decreasing the number of arcs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総 計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目理論、自明結び目、アーク表示、クロムウェル変形

1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目とは3次元空間内の輪のことであり、3次元空間内で切ったり貼ったりせずに、連続的に動かしても同じ結び目と見なす。平

面上に交差点無しで乗せることができる結び目を自明結び目と呼ぶ。任意に与えられた結び目が自明結び目であるかないか判定することは結び目理論の重要な課題の1つである。1960年代初頭にハーケンがその有限ア

ルゴリズムを見出したが、その方法は難解であり、また計算量が多すぎて、実用的とは言えなかった。2002 年のハスとラガリアスによるライデマイスター変形による方法も計算量が多すぎた。最近、アーク表示による方法がディニコフによって発見された。これは改良すれば実用的になる可能性がある。

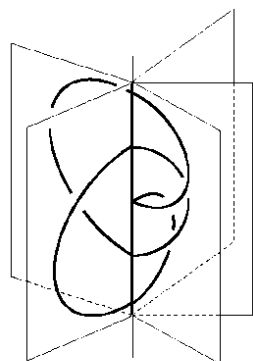


図 1

アーク表示

(2) 結び目のアーク表示とは、結び目を「全てのページをバラバラに開いた本」の形の図形の各ページと 1 本のアーク（曲がっているかもしれない線分）で交わるように配置したものである（図 1）。各アークは綴じ代の線である「軸」に両端点を持ち、そこで他のアークと繋がって、結び目の輪を形成する。自明結び目は 2 本のアークからなるアーク表示を持ち、逆に、2 本のアークからなるアーク表示を持つ結び目は自明結び目しかない。2 つのアーク表示が同一の絡み目を表すとき、一方にクロムウェル変形を有限回上手く組み合わせて適用してもう一方になることが知られている。クロムウェル変形にはエクステンジ変形、マージ変形、ディヴァイド変形の 3 種類の変形があり、エクステンジ変形はアークの本数を変えず、マージ変形はアークの本数を 1 本減らし、ディヴァイド変形はアークの本数を 1 本増やす。マージ変形は隣り合う 2 つのページに入った 2 つのアークが端点を共有したり、1 本のアークが軸上で隣り合う 2 つの頂点に両端点を持っていたり、軸上で一番上の頂点と一番下の頂点に両端点を持っている場合に適用できる。

(3) ディニコフはクロムウェルの手法を発展させて、自明結び目をほどく（アーク 2 本だけからなるアーク表示にする）変形はアークの本数を増やすディヴァイド操作を使わず、アークの本数を変えないエクステンジ操作とアークの本数を減らすマージ操作のみで済むことを示した。このように、自明結び目のアーク表示は広い意味で単調に簡単にしてゆくクロムウェル変形のみでほどくことができる。

(4) 各自然数 n に対して、アークの本数が n

本のありとあらゆるアーク表示の総数を結び目の型を限定せずに考えても、多くとも $(n!)^2$ 個であり、有限個である。したがって、上記(2)のほどき方は結び目が自明か否か（ほどけるか否か）判定するための有限アルゴリズムを与える。すなわち、アークが n 本のアーク表示が与えられたとして、それにエクステンジ変形を 0 回以上適用して得られるアーク表示を全てしらみつぶしにして求める。アークが n 本のアーク表示は有限個しかないから、それは可能である。自明結び目であればその中にマージ変形でアークの本数を減らせるアーク表示が存在するはずである。存在しなければ、そのアーク表示は自明でない結び目を表す。存在すれば、マージして得られる $n - 1$ 本のアークを持つアーク表示に関して同様の操作を繰り返すことによって判定アルゴリズムが得られる。

2. 研究の目的

(1) 1 背景の段落(4)に述べたように全てのエクステンジ変形をしらみ潰しに調べるのでは実用的ではない。しかし、どのようにエクステンジ変形すればよいのか、マニュアルができれば実用的になる可能性がある。その方法が見つかる可能性は、通常の結び目の射影図におけるライデマイスター変形の場合よりも高いと期待している。広義単調に簡単にしてゆく変形だけでよいので、人間の感覚になじみやすいというのが理由の一つである。また、アーク表示は 2 つの数列を用いて表すことができ、変形操作の記述も簡単にでき、マニュアルの記述も比較的容易であると期待されるのがもう一つの理由である。

(2) その準備の段階の研究として、自明結び目のアーク表示が具体的に何回のクロムウェル変形でほどけるかという問題がある。これは本研究開始当時は全く研究されていなかった。必要な変形の最小回数を上から評価する問題と下から評価する問題が考えられるが、まず、本研究では、下から評価することを目的とする。研究対象とするものが、どのくらい複雑なものなのか観察するために、ちょうど良い課題と思われるからである。必要な最小変形回数の評価が最初のアーク表示のアークの本数 n のなるべく大きな次数の多項式以上になるアーク表示の無限列の具体例を与えることが目標である。

3. 研究の方法

(1) まず、コンピューターを用いて、アークの本数の少ないアーク表示から順に、自明結び目を表すものたちについて、それぞれほどくに何回のクロムウェル変形が必要であ

るか調べる。最も多くの変形回数が必要な具体例たちのリストを作成し、それらから、変形回数が増える理由の一般的な法則を見つけ出し、アークの本数 n のなるべく大きな多項式回の変形が必要な具体例の無限列の候補を構成する。

また、そのためには、マージ操作によってアークの本数を減らすまでに必要なエクステンション操作の回数が重要である。多くの回数が必要な具体例をコンピューターを用いて探し、それを参考にして、アークの本数 n が一般の無限列の具体例の候補を構成する。

(2) 無限列の具体例の候補が得られたら、それらが実際に多くの回数のエクステンション変形を必要としていることを証明しなければならない。無限列であるから、コンピューターで調べることができない。

マージするまでのエクステンションの回数の下からの評価はアークの数を n に固定して考えてよい。例えば、アーク表示に対する量で、エクステンションで一定量以下変化し、マージできるアーク表示では 0 の値を取るものを定義できればよい。

全体をほどこすための変形回数の評価には、マージ変形で変化せずエクステンション変形のみで変化する量を見つける。それがエクステンション変形の回数を評価し、マージ変形の回数はアーク数が評価する。そういった量で、しかも上記の具体例の無限列に適用できるものを見出す。または適用できるように具体例を作り直す。

3. 研究成果

(1) 自明結び目の n 本のアークを持つアーク表示で、マージ変形するまでにエクステンション変形が n の 1 次式回以上必要な無限列の具体例を構成し、実際に 1 次式回以上必要であることを証明した。そのために、エクステンション変形の回数を下から評価できる量を発見した。この結果は下記の学会発表④で口頭発表した。現在、論文を執筆中である。

やや専門的になるが、証明のアイデアの概略を記す。

アーク表示とはほぼ同値のレクタンギュラー射影図を用いる。大雑把にいうと、平面上の結び目の射影図で、縦線と横線のみから成り、交差点では必ず縦線が横線の上を通るものをレクタンギュラー射影図と呼ぶ。縦線がアーク表示のアークに対応し、横線がアーク表示の頂点（結び目と軸との交点、アークの端点）に対応している。クロムウェル変形もそれに対応する変形が通用することが知られており、それもクロムウェル変形と呼ぶ。

まず、自明結び目の $writhe = 0$ の射影図を角ばらせてレクタンギュラー射影図に直

す。これは平面上のアンビエント・アイソトピーで実現できる。このレクタンギュラー射影図を R とする。ただし、 R はすぐにマージ変形できないものにしなければならない。最後の条件が付くと、このような R が存在することは明らかではないが、具体例を見つけることができた。

R の「 $(m, 1)$ -ケーブル」を R_m とする。ただし、 R_m もレクタンギュラー射影図になるように、縦線が横線の上を通るように気を付けて構成する。すると、 R_m は自明結び目を表す。これで自明結び目を表すレクタンギュラー射影図の無限個の列が得られた。

実は、この R_m はマージ変形できるようになるまでに少なくとも m 回以上のエクステンション変形が必要なのである。

そのことの証明のためには、先述のように、アーク表示に対して何らかの量を定義する必要がある。ここでは、ネックサイズという量を以下のように定義する。

アーク表示は 2 つの数列の組み合わせによって表すことができる。片方はページ番号の列であり、もう片方は頂点の番号の列である。アーク表示は開いた本の上に結び目を乗せるのであったが、ページたちに軸の上の方から見て反時計回りにページ番号を付ける。ただし、全部で n ページの場合、 n ページの次に 1 ページが来るところが通常の本とは異なる。結び目上の点を一つ任意に選び、始点とする。ただし、始点はアーク表示の頂点のところに取ってはならない。さらに、結び目にそって一周する向きを任意に決める。始点から向きの方向に一周したときに出会うアークの入ったページ番号を並べて得られる数列をアーク列と呼ぶ。これは 1 から n の番号を何らかの順に並べた順列である。頂点には上から下に順に 1 から n の番号を振る。そして同様に始点から結び目を一周して頂点列を得る。数列と言ったが、実際には、これはサイクリックな数列であり、最後の数の後には最初の数が再び続くのだと考える。

さて、アーク列と頂点列の両方について、隣り合う 2 つの数の間の距離を n を法として考える。例えば、 $n=8$ のとき、7 と 2 の距離は $7 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ と考えて、距離=3 である。この距離の最短の値をアーク表示のネックサイズと定める。ネックサイズが 1 であるアーク表示は、すぐにマージが適用できる。また、ネックサイズはエクステンション変形で高々 1 しか変化しない。よって、アーク表示にマージ変形を適用までに少なくともネックサイズ回のエクステンション変形が必要である。

さて、 R はすぐにマージできないので、そのネックサイズを s とすると s は 2 以上である。また、 R_m のネックサイズは $s-1$ と m にほぼ比例することが分かるので、 R_m はマージが適用できるようになるまでに m 回以上のエク

スチェンジを必要とすることが証明される。

(2) マージ変形するまでに必要なエクステンション変形の回数が、アークが7本で1回, 8本で2回, 9本で4回, 10本で7回, 11本で11回である具体例をコンピューターを用いて見つけた。階差数列は1, 2, 3, 4...だから、このペースで増えれば、アークの本数 n の2次式以上の回数が必要な具体例の無限列が存在するだろう、また、3次式以上にはならないだろうと予想を立てた。

(3) ほどくまでに必要なクロムウェル変形の回数が、アークが7本で6回、8本で9回、9本で13回である具体例をコンピューターを用いて見つけた。これは計算に莫大な時間がかかり、本数が多いアーク表示を調べるのは実際には困難であった。なお、この仕事は当時学生であった和田千波に卒業研究として協力して頂いた。

(4) 研究課題からはやや外れるが、アーク表示を日々観察してきたことの副産物として、2つの論文を書いた。まず、1つ目を説明する。(1)で紹介したレクタンギュラー射影図について、自明結び目のレクタンギュラー射影図はマージ変形を使わずにエクステンション変形のみで交差点無しの射影図に変形できることを証明した。勿論、ディヴァイド変形も用いない。なお、この仕事は当時学生であった山田さやかに修士論文のための研究として協力して頂いたものであり、専門雑誌 *Journal of Knot Theory and its Ramifications* に論文を投稿中である。arXiv には既に掲載されており、下記の URL で論文がダウンロードできる。
<http://arxiv.org/abs/1303.6717>

(5) 2つ目の副産物の論文を説明する。(1)で説明したレクタンギュラー射影図について、最も左の縦線と最も右の縦線の間のエクステンション変形やマージ変形が何回のライデマイスター変形で実現できるか、その回数の上界を求めた。この仕事は当時学生であった西川友紀に修士論文のための研究として協力して頂いたものであり、専門雑誌 *Journal of Knot Theory and its Ramifications* に論文を投稿中である。

(6) 研究課題と直接の関わりは無いが、他に 1-genus 1-bridge knot の外部の Heegaard splitting で種数 2 のものが 1-genus 1-bridge knot の分割を与える曲面に対してどのような位置にあるか研究した2つの論文が専門雑誌に掲載された(下記、雑誌論文④と⑤)。また、結び目の特徴をよく捉える quandle という代数の演算表に関する論文

が専門雑誌に掲載予定となった(下記、雑誌論文⑥)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Chuichiro Hayashi, Miwa Hayashi, Minori Sawada and Sayaka Yamada, Minimal unknotting sequence of Reidemeister moves containing unmatched RII moves, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, Vol.21, No.10, 2012, 13pages, DOI: 10.1142/S021821650099X
- ② Chuichiro Hayashi, Miwa Hayashi and Tahl Nowik, Unknotting number and number of Reidemeister moves needed for unlinking, *Topology and its Applications*, 査読有, Vol. 159, 2012, pp.1467--1474, DOI:10.1016/j.topol.01.008.
- ③ Chuichiro Hayashi, Miwa Hayashi and Kanako Oshiro, On linear n -colorings for knots, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, Vol. 21, No. 14, 2012, 13pages, DOI: 10.1142/S0218216512501234
- ④ Hiroshi Goda and Chuichiro Hayashi, Genus two Heegaard splittings of 1-genus 1-bridge knots, *Kobe Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 29, 2012, 45-84
- ⑤ Hiroshi Goda and Chuichiro Hayashi, Genus two Heegaard splittings of 1-genus 1-bridge knots II, *Saitama Mathematical Journal*, 査読有, Vol. 29, 2012, 25-54
- ⑥ Chuichiro Hayashi, Canonical forms for operation tables of finite connected quandles, *Communications in Algebra*, 査読有, 掲載予定

[学会発表] (計 5 件)

- ① 林忠一郎(話者)、林美和(話者)、Cowrithe と Reidemeister 変形の回数・torus knots への応用、結び目の数理解セミナー Knotting Nagoya、名古屋工業大学、2010 年 6 月 6 日
- ② 山田さやか(話者)、澤田実、林忠一郎、林美和、Minimal unknotting sequences of Reidemeister moves containing unmatched RII moves、研究集会「結び目の数学 IV」、早稲田大学、2011 年 12 月 27 日
- ③ 西川友紀(話者)、林忠一郎、自明結び目

のレクタングラー・ダイアグラム I、
2012 琉球結び目セミナー、那覇市ぶんか
テンプス館、2012 年 9 月 3 日

- ④ 山田さやか(話者)、林忠一郎、自明結び
目のレクタングラー・ダイアグラム II、
2012 琉球結び目セミナー、那覇市ぶんか
テンプス館、2012 年 9 月 3 日

- ⑤ 林忠一郎、自明結び目のレクタングラ
ー・ダイアグラム III、2012 琉球結び目
セミナー、那覇市ぶんかテンプス館、2012
年 9 月 3 日

〔その他〕

ホームページ

<http://www2.jwu.ac.jp/kgr/jpn/ResearcherInformation/ResearcherInformation.aspx?KYCD=00006715>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

林 忠一郎 (HAYASHI CHUICHIRO)
日本女子大学・理学部数物科学科・教授
研究者番号：20281321

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし