

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：34406

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540104

研究課題名（和文）絡み目の強自己  $C_n$  同値関係による分類とミルナー不変量の研究研究課題名（英文）On Milnor invariants and classification of links under free self  $C_n$ -equivalence

研究代表者

渋谷 哲夫（SHIBUYA TETSUO）

大阪工業大学・工学部・教授

研究者番号：00162652

研究成果の概要（和文）：ミルナー絡み目から着想し、リボン絡み目の組織的な構成を目指した単純リボン操作、およびその拡張である単純リボン融合を導入し、絡み目に与える影響について研究した。特に、ゴールドバーグによって導入された絡み目の分離数と（一般的な種数を精密化した） $\nu$ 次種数について、単純リボン融合（操作）は絡み目の分離数を上げず、 $\nu$ 次種数は下げないことを示した。

研究成果の概要（英文）：We introduced simple ribbon moves, and as their extension, simple ribbon fusions toward a systematic construction of ribbon links inspired by Milnor links. Then we studied the effect if we apply them to links, especially on disconnectivity numbers of link introduced by Goldberg and  $\nu$ -th genus, which is a refinement of general genus. In fact, we showed that simple ribbon fusions (moves) never increase the disconnectivity numbers of links, and never decrease the  $\nu$ -th genus of links.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学，結び目理論

## 1. 研究開始当初の背景

空間内の有限個の単純閉曲線の集合を絡み目という。単純閉曲線が1個の絡み目を特に結び目と呼ぶ。結び目理論における究極の目標は

絡み目のアンビエント・イソトピーによる分類である。しかし、その解決は現時点では現実的でない。そこで、まずアンビエント・イソトピーよりも“粗い”同値関係によって絡み目を分類し研究することが、解決につながる最善の策の1つである。

これについて Milnor [2]は、自己交差交換によって生成されるリンク・ホモトピーという同値関係を導入した。その論文では成分数 3 の絡み目についてリンク・ホモトピーによる分類が与えられ、その後 Habegger-Lin[1]で分類が完成された。ここで単純閉曲線の個数を成分数という。

研究代表者は [5]においてリンク・ホモトピーを拡張し、自己デルタ変形によって生成される自己デルタ同値を導入した(デルタ変形は結び目理論において有名な変形である)。ここで拡張というのは、絡み目が自己デルタ同値であればリンク・ホモトピー同値であるからである。自己デルタ同値による分類は難しく、Nakanishi-Ohyama[4]で成分数 2 の絡み目についてのみ行われている。

2000 年に Goussarov と Habiro はそれまで知られていた絡み目に対する変形を統合する  $C_n$ -操作を導入した。ここで  $C_1$ -操作は交差交換と、 $C_2$ -変形はデルタ変形と、それぞれ同値である。研究代表者は連携研究者との共同研究[6]で、自己デルタ同値を拡張した自己  $C_n$ -同値関係を導入した。自己  $C_n$ -同値関係による分類は、自然数  $n$  の値が大きいほど細かな分類を与える(アンビエント・イソトピーによる分類に近づく)という優れた性質を持っている。しかしながら、自己  $C_n$ -同値関係による分類は上記のように  $n=1$  の場合にしか完成していない。

ところで Milnor は論文[2][3]においてミルナー不変量という、イソトピー不変量群を導入している。各ミルナー不変量には繰り返し指数と呼ばれる自然数が定義されている(各自然数  $n$  に対し、繰り返し指数が  $n$  のミルナー不変量は複数次存在する)。そして論文[2]では繰り返し指数が 1 のミルナー不変量はリンク・ホモトピー不変量であることを示した。さらに絡み目  $L$  について繰り返し指数が 1 のミルナー不変量の値が全て 0 であることは  $L$  がリンク・ホモトピーで自明であるための必要十分条件であることも示した。

[1] N.Habegger, X.S.Lin,  
The classification of links up to link-homotopy,  
J. Amer. Math.Soc. **3** (1990) 89-419.

[2] J.W.Milnor, Link groups,  
Ann. of Math. (2) **59** (1954) 177-195.

[3] J.W.Milnor, Isotopy of links,  
Algebraic geometry and topology, 280-306,  
Princeton Univ. Press, 1957.

[4] Y.Nakanishi, Y.Ohyama,  
Delta link homotopy for two component links,  
III, J.Math.Soc.Japan, **55** (2003) 641-654.

[5] T.Shibuya,  
Self D-equivalence of ribbon links,  
Osaka J. Math. **33** (1996) 751-760.

[6] T.Shibuya and A.Yasuhara,  
Self  $C_k$ -move, quasi self  $C_k$ -move and the  
Conway potential function for links, J. Knot  
Theory Ramifications, **13** (2004) 877-893.

## 2. 研究の目的

研究の目的は絡み目を様々な同値関係によって分類することである。本研究では Milnor のリンク・ホモトピーの一般化である(強)自己  $C_n$ -同値関係による分類を考察し、ミルナー不変量と(強)自己  $C_n$ -同値関係との相互関係を明らかにすることを目標にしている。

## 3. 研究の方法

研究代表者が方針の決定・役割分担を行い、研究分担者と連携研究者から得られた結果を統合・処理し、まとめ上げる。また必要に応じて研究協力者を加えて行う。

絡み目の補空間に埋め込まれた、もしくははめ込まれた曲面を媒介としたり、複数の曲面どうしの交差を解析する。その際、どのような曲面を扱うかは重要であるが、試行錯誤するしかない。

## 4. 研究成果

### ・ 非自己 $C_n$ -操作に関する研究

本研究では  $C_n$ -操作を絡み目に適用する際、ある一つの成分のみに限る、自己  $C_n$ -操作に着目しているが、そうではない、すなわち、必ず 2 成分以上に作用する、非自己  $C_n$ -操作との関連についても懸案事項であった。そこで研究分担者である塚本達也氏、研究連携者である安原晃氏に加え、神戸大学の中西康剛氏に協力を仰ぎ、2つの絡み目が非自己  $C_n$ -同値である必要十分条件は、その2つの絡み目が  $C_n$ -同値であり、かつ対応する各成分の結び目型が一致することを示した。

### ・ 単純リボン操作に関する研究

ミルナー絡み目から着想し、リボン絡み目の組織的な構成を目指した単純リボン操作を導入し、絡み目に与える変化について研究した。一定の自然な条件のもとで、単純リボン操作は結び目や絡み目の種数を増加させること、従って結び目や絡み目の型を変えることが分かった。このことによって、ある結び目(絡み目)に単純リボン操作を施して得

られた結び目 (絡み目) は, 元の結び目 (絡み目) が自明か非自明かに関わらず, その結び目 (絡み目) は非自明であることが言える. また, 単純リボン操作は 1 型と 2 型に分かれるが, 1 型については結び目や絡み目のアレキサンダー多項式を変えないことを示した.

従ってアレキサンダー多項式が自明なりボン型結び目を無限に系統的に与えることができた. また 2 型については常にアレキサンダー多項式を変化させることを示し, その変化量も求めた. さらに, 単純リボン操作で移り合う絡み目が, 自己  $C2$ -同値となるための十分条件も与えた.

また, 種数を変化させないための必要十分条件についても考察したが, 一般的な種数の場合, 自然な形では得られないことを示した. すなわち, 絡み目の型は変えるのであるが, 種数は変化させない例があることを示した. そのため, 名古屋工業大学の平澤美可三氏に協力を仰ぎ,  $h$ -complexity という, オイラー数と相性の良い新たな絡み目の不変量を導入した. これについては自然な形で種数を変化させないための必要十分条件を与えることができた.

代数的に分離した絡み目に特化した研究も行った. 代数的に分離した絡み目は  $C2$ -同値関係において自明な絡み目と同値であることが知られている. ここで絡み目の各 2 成分部分絡み目の絡み数が零であるとき, その絡み目は代数的に分離している, という. しかしながら自己  $C2$ -同値関係においては, 自明な絡み目に同値でない代数的に分離した絡み目が存在する.

そこで我々は代数的に分離した絡み目が自己  $C2$ -同値関係において自明な絡み目に同値であるための幾何的な十分条件を 2 つ与えた. 1 つは代数的に分離した絡み目が張るリボン曲面における特異点集合に関する条件で与えた. これは境界絡み目が自己  $C2$ -同値関係において自明な絡み目に同値であるという, 安原晃氏 (連携研究者) との共同研究の結果の拡張になっている. またもう一方は代数的に分離した絡み目が張るクラスプレス円盤における三重点集合に関する条件で与えた. これは  $C2$ -分離した絡み目が自己  $C2$ -同値関係において自明な絡み目に同値であるという, 先の神戸大学の中西康剛氏 (研究協力者) と, 塚本達也氏 (研究分担者), 安原晃氏 (連携研究者) との共同研究の結果の拡張になっている.

#### ・ 単純リボン融合に関する研究

前述の単純リボン操作に関する研究の後, 単純リボン融合への拡張を着想し導入した. 単純リボン操作自身様々な形態を取り, 応用

範囲の広いものであるが局所変形であるという点で限定的ではある. しかし単純リボン融合はより大域的で, 一般の融合 (バンド和) の研究への応用も考えられるものである. 実際 Gabai と Scharlemann による結び目と結び目の融合による種数の超加法性の定理の絡み目と自明な絡み目の融合への一般化を考えた際, その第一歩となる結果を得ることができた.

そこではゴールドバーグによる絡み目の分離数と  $\nu$  次種数を発見したことが大きく, 前述の単純リボン操作の結果をより自然な形で精密化・一般化できた.

具体的には, 単純リボン融合 (操作) は絡み目の分離数を上げず,  $\nu$  次種数は下げないことを示した. さらに, 単純リボン融合が絡み目型を変えないことと, 分離数と最大  $\nu$  次種数を変えないことが同値であることも示した. この結果は 2012 年 12 月にアメリカ合衆国で行われた研究集会「Knots in Washington XXXV」において塚本達也氏 (研究分担者) が発表した. 研究成果は現在論文にまとめており, 完成し次第専門誌に投稿する.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Y. Nakanishi, T. Shibuya, T. Tsukamoto, A. Yasuhara,  
On non-self local moves,  
J. Knot Theory and its Ramifications, 査読有, 21, 2012, 125005511-9  
DOI: 10.1142/S0218216511010097
- ② T. Shibuya, T. Tsukamoto,  
Self delta-equivalence of algebraically split links,  
Mem. Osaka Inst. Tech, Ser A, 査読有, 56, 2011, 25-31. URL:  
<http://www.oit.ac.jp/japanese/toshokan/tosho/kiyou/rikouhen/56-1/03r.pdf>
- ③ T. Fleming, T. Shibuya, T. Tsukamoto, A. Yasuhara, Homotopy,  
 $\Delta$ -equivalence and Concordance for knots in the complement of a trivial link,  
Topology and its Applications, 査読有, 157, 2010, 1215-1227. URL:  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864110000611>

[学会発表] (計 4 件)

- ① K. Kishimoto, T. Shibuva, T. Tsukamoto,  
Simple ribbon fusions and genera of links,  
Knots in Washington XXXV,  
2012 年 12 月 9 日,  
the George Washington University (USA)
- ② 岸本 健吾, 渋谷 哲夫, 塚本 達也,  
Simple ribbon fusions for links II,  
日本数学会 2012 年度秋季総合分科会,  
2012 年 9 月 20 日, 九州大学
- ③ 小林 一章, 渋谷 哲夫, 塚本 達也,  
On simple ribbon moves on links,  
E-KOOK Seminar 2010, 2010 年 8 月 27 日,  
大阪市立大学
- ④ K. Kobayashi, T. Shibuva, T. Tsukamoto,  
Simple ribbon moves on links,  
Knots in Poland III,  
2010 年 8 月 3 日,  
Bedlewo (Poland)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

渋谷 哲夫 (SHIBUYA TETSUO)  
大阪工業大学・工学部・教授  
研究者番号：00162652

### (2) 研究分担者

塚本 達也 (TSUKAMOTO TATSUYA)  
大阪工業大学・工学部・准教授  
研究者番号：10350480

### (3) 連携研究者

安原 晃 (YASUHARA AKIRA)  
東京学芸大学・教育学部・教授  
研究者番号：60256625