

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540105

研究課題名(和文)非正曲率空間のCoarse解析とコンパクト化による剰余の位相的解析

研究課題名(英文)Coarse analyzing metric spaces of non-positive curvature and topological analyzing remainders of its compactifications

研究代表者

知念 直紹(CHINEN, NAOTSUGU)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・総合教育学群・教授)

研究者番号：20370067

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：数学的に(特に幾何学的に)重要なコクセター群について研究を行い、コクセター群が幾何的に作用する非正曲率空間あるいは双曲空間の理想境界の位相的性質、具体的にはその境界が位相的にフラクタルの構造をもつ必要十分条件、コクセター群の境界として位相的普遍空間の構成、コクセター群への分解定理の拡張についての研究成果が得られた。また、空間のコンパクト化の剰余の固定点と深い関係がある写像のカラーリングについて調べ、局所有限なグラフ上の同相写像のカラーリング数を決定するための必要かつ十分条件の研究成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：It is important mathematically (in particular, geometrically) to study Coxeter groups. We investigate Coxeter groups and obtain topological properties for boundaries of metric spaces of non-positive curvature and hyperbolic spaces on whose Coxeter groups are geometrically acted. Specifically, we provide the following results: a necessary and sufficient condition with a topological fractal structure of its boundary, the construction of topological universal spaces as the boundaries of Coxeter groups, and, an extension of the decomposition theorem to the Coxeter group. Moreover, we investigate colorings numbers of maps deeply related to fix points of remainders of compactifications and we obtain a necessary and sufficient condition with colorings numbers of homeomorphisms on locally finite graphs.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何 幾何学的群論 コクセター群 写像によるカラーリング asymptotic次元 Coarse 幾何学 距離に依存するコンパクト化 Higsonコンパクト化

### 1. 研究開始当初の背景

無限離散群の研究、基本群に関連する多様体の不変量の研究の道具である Gromov が提案した Coarse 幾何学の研究と、群が幾何学的に作用する双曲空間あるいは非正曲率空間の研究は、幾何学の研究の中心的な興味のある対象である。

Coarse 幾何学のなかで特に重要な不変量として Gromov が定義した asymptotic 次元は、多くの数学者が研究している Novikov 予想と Gromov-Lawson 予想との深い関連があり、Coarse 幾何学の中でも研究すべき不変量となっている。

群が幾何学的に作用する双曲空間あるいは非正曲率空間の距離に依存するコンパクト化の位相的あるいは幾何学的性質を調べることによって、無限離散群の幾何学的性質を解明することは、幾何学的群論において中心的な方法になっている。

### 2. 研究の目的

Novikov 予想と Gromov-Lawson 予想と関連のある Coarse 幾何学の asymptotic 次元の研究と、非正曲率空間(CAT(0)空間という)の境界とその他のコンパクト化の剰余の代数的位相的性質と連続体からみた位相的性質の研究が主な目的となる。具体的には、以下となる。

- (1) 具体的な CAT(0)空間の asymptotic 次元を決定
- (2) 群が幾何的に作用している CAT(0)空間の境界 Strong Shape 同値と CE 同値の解明
- (3) CAT(0)空間の境界あるいは Higson コンパクト化の剰余の位相的性質の解明

### 3. 研究の方法

研究分担者の都城工業高等専門学校所属の友安一夫氏、あるいは連携研究者である早稲田大学所属の小山晃氏、静岡大学所属の保坂氏と直接対面し本研究について共同研究を行い、さらにメール・電話等を使用して情報等を共有し研究を押し進めた。特に、メールにおいて、共同研究を行う場合は絵を描いて説明することが多々あり、そのためスキャナーを利用し絵をメールで送ってやりとりをした。また、積極的に研究集会等に参加し、コンパクト化あるいは幾何学的群論に関する情報を収集した。さらに、早稲田大学幾何学セミナーにおいて最新の Coarse 幾何学について議論をした。得られた研究成果を RIMS 研究集会等の研究集会において発表した。

- (1) 研究分担者の友安氏は Stone-Cech コンパクト化、Higson コンパクト化あるいは Smirnov コンパクト化に関して一般的なトポロジーの性質の研究について国内における先進的な研究者であるので、距離に依存する

コンパクト化に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あって共同研究を行った。

- (2) 連携研究者の小山氏は次元論あるいはシェイプ理論の研究において国内で先進的な研究者である。よって、小山氏と次元論に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あって共同研究を行った。また海外からの Coarse 幾何学の情報を積極的に収集し、早稲田大学幾何学セミナーにおいて最新の Coarse 幾何学について議論し理解を深めた。

- (3) 連携研究者の保坂氏は幾何学的群論の中の無限コクセター群の研究において国内で先進的な研究者であるので、幾何学的群論の立場から研究を行うことにおいてメール・電話等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接対面し共同研究を行った。また幾何学的群論の情報を積極的に収集し、本研究に活用してきた。

### 4. 研究成果

- (1) 無限コクセター群の境界として位相的普遍空間の構成について：すべての  $n$  次元コンパクト距離空間は  $n$  次元メンガー普遍空間に位相的に埋め込めるので、 $n$  次元理想境界を持つすべての双曲群（あるいは CAT(0) 群）は理想境界が  $n$  次元メンガー普遍空間となる双曲群（あるいは CAT(0) 群）に Coarse の意味で埋め込める可能性がある。つまり、理想境界が  $n$  次元メンガー普遍空間となる双曲群（あるいは CAT(0) 群）を構成することは、 $n$  次元理想境界をもつ双曲群の研究に対してとても重要な問題となっている。Gromov に指導を受けた Benakli の博士論文において、コクセター群が幾何的に作用する双曲空間の理想境界が 1 次元メンガー普遍空間となる双曲（非直角）コクセター群を初めて構成した（しかし、この結果は現在まで数学雑誌に論文として出版されていない）。その後、数人の研究者により理想境界が  $n$  次元メンガー普遍空間となるコクセター群を構成したと発表されたが、現在まで数学雑誌に論文は出版されていない。静岡大学の保坂氏との近年の共同研究において、ある条件下で理想境界が 1 次元メンガー普遍空間となる双曲直角コクセター群の必要十分条件を示し、理想境界が 1 次元メンガー普遍空間となる双曲直角コクセター群を具体的に構成した（この研究成果は学会発表とにおいて発表した）。

- (2)  $n$  次元ユークリッド空間と球面の対称積の等長写像群について：Borsuk と Ulam によって導入された空間の対称積は、通常積空間より複雑な空間になるため多くの研究者によって研究がなされてきた。また、ある

空間に幾何的に作用する群はその空間の等長写像群の部分群なので、空間の等長写像群を調べることは重要である。特に発表論文において、 $n$ 次元ユークリッド空間と球面の対称積の等長写像群を調べ、 $n$ 次元ユークリッド空間と球面の $k$ 次対称積の等長写像群は、それぞれ $n$ 次元ユークリッド空間と球面の等長写像群と同型であることを示した。つまり、等長写像群としてみれば、対称積は複雑ではなく、さらにこの結果は Borovikova と Ibragimov の最近の結果を拡張したものになっている。

(3) コクセター群の rigidity について：コクセター群がいつコクセター系を決定するのか、というコクセター群の代数的な rigidity の問題に関して、これまでに得られた研究成果から、さらに進展を得ている。コクセター群  $W$  が、そのコクセター系  $(W, S)$  を同型の差を除いて決定するとき、コクセター群  $W$  を代数的に "rigid" であるという。コクセター群の分類やコクセター群の rigidity の判定は大きな未解決問題である。発表論文において、新しい rigid なコクセター群のクラスを与えた。特にこれは、D.Radcliffe(2001)による結果の拡張となっている。

(4) 写像のカラーリングについて：写像のカラーリングはコンパクト化の剰余の固定点と深い関係がある。連結な空間はある連結なグラフと同じ asymptotic 次元を持つことが知られている。特に有限生成群のケーリーグラフの asymptotic 次元を調べることは幾何学的群論においても重要な位置をしめている。つまり、グラフ上の同相写像のカラーリング数を調べることは重要だと考える。発表論文において、局所有限グラフ上の不動点を持たない同相写像について調べ、その同相写像の周期達の最大公約数が 1 あるいは 3 であることと、その同相写像のカラーリング数は 4 であることが必要かつ十分条件であることを示した。また、上述の論文において、局所有限でないグラフでは上記の結果は成立しないこと、つまり局所有限でないグラフ上の不動点を持たない同相写像で 3 周期を持つが、カラーリング数は 3 であるグラフと同相写像を構成した。

(5) コクセター群への分解定理の拡張について：CAT(0)群が幾何学的に作用するCAT(0)空間の splitting theorem を示した。「群が積に分解するとき、群の積の分解に応じて作用する空間も積に分解する」という定理 "splitting theorem" は歴史的に有名なものがあるが知られているが、発表論文においての主定理は、そのCAT(0)群・CAT(0)空間への拡張にあたる。CAT(0)群が、幾何学的に作用するCAT(0)空間の境界の位相を決定するとき "rigid" という。

C.Croke-B.Kleiner(2000)によって、non-rigidなCAT(0)群が構成されている。本研究成果の splitting theorem の応用として、「2つの rigid CAT(0)群の積は rigid となる」ことを得ている。

(6) コクセター群の境界の位相的にフラクタルの構造について：CAT(0)空間  $X$  のコンパクト離散鏡映群  $W$  を考えると、 $W$  はコクセター群となる。発表論文において、コクセター群  $W$  の Davis-Moussong 複体とこのCAT(0)空間  $X$  の間の類似性を得た。さらに、コクセター群  $W$  の parabolic 部分群の境界上の極限集合についていくつか研究成果を得た。

一般に複雑な構造をもつCAT(0)群の境界の研究に対して、その複雑さを捕えるために力学系の概念を導入し、Ballmannの "rank-one isometry" に関する研究成果と Caprace-Fujiwara のコクセター群の Davis 複体の rank-one isometry に関する結果を用いることにより、発表論文において、コクセター群が作用するCAT(0)空間の境界が位相的にフラクタルの構造をもつ必要十分条件を得た。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計13件)

Naotsugu Chinen, Isometries on the symmetric products of the Euclidean spaces with usual metrics、数理解析研究所講究録、査読無、1884、2014、pp.7-12、<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1884-02.pdf>

Naotsugu Chinen, Remarks on boundaries of CAT(0) spaces from Shape Theory、数理解析研究所講究録、査読無、1833、2013、pp.27-35.

Tetsuya Hosaka, On a new class of rigid Coxeter groups、査読有、Hokkaido Mathematical Journal、42、2013、no. 2、pp.239-246、<http://projecteuclid.org/euclid.hokmj/1372859586>

Naotsugu Chinen, Tetsuya Hosaka, Asymptotic dimension and boundary dimension of proper CAT(0) spaces、Tsukuba Journal of Mathematics、査読有、36、2012、no. 2、pp.185-191、<http://projecteuclid.org/euclid.tkbjm/1358776998>

Naotsugu Chinen, The colorings of homeomorphisms on connected graphs、Topology and its Applications、査読有、

159、2012、no. 4、pp.1236-1245、  
DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.003

Akira Koyama、Józef Krasinkiewicz、Stanisław Spieź、Embeddings into products and symmetric products – an algebraic approach、Houston Journal of Mathematics、査読有、38、2012、no. 2、pp.611-641、  
<http://math.uh.edu/~hjm/Vol38-2.html>

Tetsuya Hosaka、On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature、査読有、Mathematische Zeitschrift、272、2012、no. 3-4、pp.1037-1050、  
DOI: 10.1007/s00209-011-0972-x

Tetsuya Hosaka、Parabolic subgroups of Coxeter groups acting by reflections on CAT(0) spaces、査読有、Rocky Mountain Journal of Mathematics、42、2012、no. 4、pp.1207-1214、  
DOI: 10.1216/RMJ-2012-42-4-1207

Yuji Akaike、Naotsugu Chinen、Kazuo Tomoyasu、The Smirnov remainders of uniformly locally connected proper metric spaces、Topology and its Applications、査読有、158、2011、no. 1、pp.69-83、  
DOI: 10.1016/j.topol.2010.10.006

Naotsugu Chinen、A necessary and sufficient condition for metric space to be coarse equivalence to the half real line、数理解析研究所講究録、査読無、1728、2011、pp.59-66、  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1728-09.pdf>

Akira Koyama、Józef Krasinkiewicz、Stanisław Spieź、Generalized manifolds in products of curves、Transactions of the American Mathematical Society、査読有、363、2011、no. 3、pp.1509-1532、  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05157-8>

Tetsuya Hosaka、On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures、Tsukuba Journal of Mathematics、査読有、35、2011、no. 2、pp.153-160、  
<http://projecteuclid.org/euclid.tkbjm/1331658700>

Tetsuya Hosaka、On non-sensitive homeomorphisms of the boundary of a proper cocompact CAT(0) space、Journal of Mathematical Sciences、the University of Tokyo、査読有、18、2011、no. 4、pp.491-504、

<http://repository.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/dspace/bitstream/2261/53538/1/jms180405.pdf>

〔学会発表〕(計8件)

Tetsuya Hosaka、On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups、International Conference on Topology and Geometry 2013、Shimane University、Matsue、Japan、2013年08月05日

Naotsugu Chinen、Hyperbolic right-angled Coxeter groups with boundaries as the universal curves、International Conference on Topology and Geometry 2013、Shimane University、Matsue、Japan、2013年08月02日

Akira Koyama、On embeddings into products of curves、8th Summer Conference on Topology and its Applications、Nipissing University、NorthBay、Canada、2013年07月25日

Naotsugu Chinen、A construction of hyperbolic right-angled Coxeter groups whose boundaries are a Menger universal curve、8th Summer Conference on Topology and its Applications、Nipissing University、NorthBay、Canada、2013年07月25日

Naotsugu Chinen、The colorings of fixed-points free homeomorphisms on locally finite graphs、日本数学会、東京理科大学、東京都、2012年03月27日

Kazuo Tomoyasu、Smirnov コンパクト化の剰余と一様局所連続性、日本数学会、東京理科大学、東京都、2012年03月27日

Naotsugu Chinen、Colorings of homeomorphisms on connected spaces、International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications、Colima、Mexico、2011年09月29日

Kazuo Tomoyasu、Dimensions of Smirnov remainders controlled by uniform local connectedness、International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications、Colima、Mexico、2011年09月29日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/naochin/>

[http://www.nda.ac.jp/cc/math/chinen.htm](http://www.nda.ac.jp/cc/math/chinen.html)

l

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

知念 直紹 (CHINEN NAOTSUGU)  
防衛大学校・総合教育学群・教授  
研究者番号：20370067

### (2) 研究分担者

友安 一夫 (TOMOYASU KAZUO)  
都城工業高等専門学校・その他部局等・  
准教授  
研究者番号：10332107

### (3) 連携研究者

小山 晃 (KOYAMA AKIRA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：40116158

### (4) 連携研究者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)  
静岡大学・理学(系)研究科(研究院)・  
准教授  
研究者番号：50344908