

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 24 日現在

機関番号：12701
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540117
 研究課題名（和文） Rauzy fractal 領域の境界に関する構造研究

研究課題名（英文） The structure of the boundary of the Rauzy fractal

研究代表者
 古門 麻貴 (FURUKADO MAKI)
 横浜国立大学・国際社会科学研究科・助手
 研究者番号：20303068

研究成果の概要（和文）：4-interval exchange 変換上の Rauzy induction から生成される周期 8 のサブスティテューション列に注目した。ここで自然に定義できるタイリングサブスティテューションは、タイルを重複させてしまう場合があるが、タイルの「ブロック化法」を用いることによって重複を回避し、互いにタイリングサブスティテューションによって移り合う 8 枚のタイリングを生成することに成功した。

研究成果の概要（英文）：The tiling substitutions obtained by the Rauzy induction of 4-interval exchange transformations with the period of length 8 sometimes generate the overlapping patch. We avoid this phenomenon by using the “blocking method” and we succeeded in generating 8 tilings.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：サブスティテューション，タイリングサブスティテューション，フラクタル，準周期タイリング

1. 研究開始当初の背景
 rank d の自由群 $F\langle 1, 2, \dots, d \rangle$ 上の自己同型変換 θ の随伴行列 L の固有値が、hyperbolic 条件 $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2| > 1 > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_d|$ を満たすとき、 θ を用いて、 L_θ 不変 2 次元拡大空間上に Rauzy fractal 領域を構成するための理論が、当時盛んに研究されていた。Rauzy fractal の境界は θ を用いて表現することができるが、しばしば複雑な cancellation を起こす。その cancellation を

どう制御するかが課題であった。具体的には、Tribonacci サブスティテューション: $1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1$ の自己同型変換 θ は、 $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 13^{-1}, 3 \rightarrow 23^{-1}$ となるが、その随伴行列 L_θ の固有多項式は、hyperbolic な構造を持っている。そして L_θ 不変 2 次元拡大空間を P 、単位ベクトル $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ の P への射影を $\{\pi e_i\}_{i=1,2,3}$ とし、自由群の元 $21^{-1}32^{-1}13^{-1}$ と $\{\pi e_i\}_{i=1,2,3}$ からつくられる P 上の閉折線を同一視することとする。このとき、 $\theta^n(21^{-1}32^{-1}13^{-1})$ に対し、

L_θ^n を作用させ正規化したもの、すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} (\theta^n(21^{-1}32^{-1}13^{-1}))$ が Rauzy fractal と呼ばれる領域 X の境界である。この領域の境界は、フラクタルカーブとなっていて、この領域 X を用いて平面 P 上に周期的タイリングが形成されること、また領域 X は、2次元トーラスと同相であることが知られている ([Arnoux-伊藤])。ところで、 $\theta(21^{-1}32^{-1}13^{-1}) = \theta(2)\theta(1^{-1})\theta(3)\theta(2^{-1})\theta(1)\theta(3^{-1}) = 13^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 23^{-1} \cdot 31^{-1} \cdot 3 \cdot 32^{-1} = 13^{-1}3^{-1}21^{-1}332^{-1}$ より、下線部「 $3^{-1} \cdot 3$ 」の箇所 cancellation が発生していることがわかる。この cancellation の発生が、 X の境界のハウスドルフ次元の値を正確に知ろうとすること、いいかえると、 $\theta^n(21^{-1}32^{-1}13^{-1})$ の辺の個数のオーダーを求めることを難しくしている。Tribonacci サブスティテューションの自己同型変換 θ から生成される X の境界については、 $A=21^{-1}, B=32^{-1}, C=13^{-1}, D=3^{-1}$ とブロック化することで得られる、新しい4文字上の自由群 $F\langle A, B, C, D \rangle$ 上の自己同型変換 $\Theta : A \rightarrow CD, B \rightarrow A, C \rightarrow D^{-1}B, D \rightarrow A$ により、 $\theta^n(21^{-1}32^{-1}13^{-1}) = \Theta^n(ABC)$ を示すことができ、かつ $\Theta^n(ABC)$ において、cancellation を発生させないようにできた。この「ブロック化法」により、 X の境界がフラクタルカーブとなること、およびそのハウスドルフ次元を計算できることに成功していた ([伊藤-木村])。次のステップとして、より複雑な cancellation が発生する場合に対応できるような方法を確立することが求められていた。

2. 研究の目的

当時、関心があったのは、

- (1) $d=3$ において、コンパニオン行列
- (2) $d=4$, かつ non-Pisot 型の行列に関する自己同型変換 θ において、発生する cancellation を制御するための方法を明らかにすることであった。

3. 研究の方法

境界について探求するために、タイリングの生成に関し、調べる必要があった。

- (1) $d=3$ の場合、すでに Jacobi-Perron アルゴリズム (高次元連分数アルゴリズムの1つ) から生成されるサブスティテューションについて、タイリングを生成するためのサブスティテューション列の条件が知られていた。そこで、modified Jacobi-Perron の場合についてのサブスティテューション列をつくり、平面上にタイリングを生成するための様子を観察した。
- (2) $d=4$ の場合、4-interval exchange 変換の family の Rauzy induction を通して、4次の hyperbolic total real な non-Pisot 型の固有値を持つ substitution が現れ

るが、それらを用いて、平面上にタイリングを生成させた。

なお上記のテーマについて、フランスの P. Arnoux, V. Berthé, T. Jolivet, A. Siegel などの quasi-periodic 平面タイリングの研究グループと情報交換を行いながら、研究活動を進めた。

4. 研究成果

(1) $d=3$ の場合、modified Jacobi-Perron アルゴリズムから生成されるサブスティテューションに対し、平面上に、全平面を覆うタイリングを生成させるためのサブスティテューションの並び方の条件を具体的に示した。この成果は、論文「The condition for the generation of the stepped surface in terms of the modified Jacobi-Perron algorithm」として、まとめているところである。

(2) さらに、田村-安富により考案された、3次元と相性のよい value 付き高次元連分数アルゴリズムから生成されるサブスティテューションに対しても、そこから自然につくられるタイリングサブスティテューションの列を用意し、タイリングを生成してみせた。この成果は、論文「A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface」としてまとめ、現在投稿中である。

(3) 4-interval exchange 変換上の Rauzy induction から生成されるサブスティテューションを定義すると、タイルが重複するタイリングサブスティテューションに遭遇する。この重複問題を、タイルのブロック化法を用いることによって、回避することに成功した。そして具体的に、周期8のサブスティテューション列の場合において、タイリングがタイリングサブスティテューションによって移り合うことを示した。

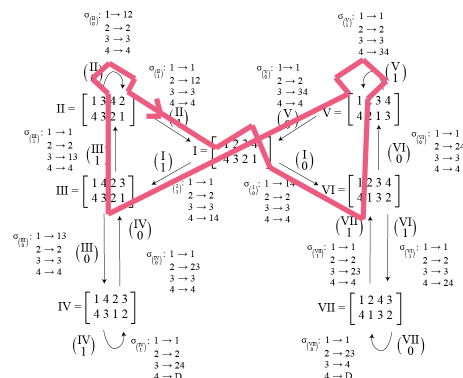


図 1 Rauzy induction diagram with substitutions.

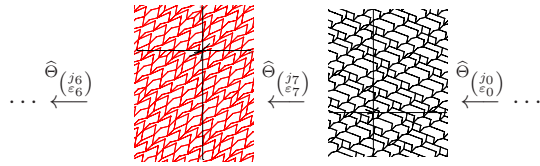


図 2 多角形によるタイリングが、タイリングサブスティテューションによって移り合う様子。

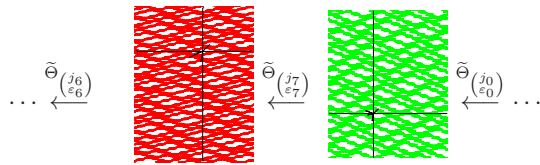


図 3 フラクタル図形によるタイリングが、タイリングサブスティテューションによって移り合う様子。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Pierre Arnoux, 古門麻貴, Edmund Harriss, 伊藤俊次, Algebraic numbers, free group automorphisms and substitutions on the plane, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, vol. 363, no. 9 (2011), pp. 4651-4699
DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05188-3

- ② Pierre Arnoux, 古門麻貴, 伊藤俊次, Substitutions from Rauzy induction on 4-interval exchange transformations and quasi-periodic tilings, 京都大学数理解析研究所講究録「準周期秩序の数理」, 査読無, 1725 (2011), pp. 152-174

[学会発表] (計 12 件)

- ① 古門麻貴, On the condition for the generation of the stepped surfaces via modified Jacobi-Perron expansions I, II, Workshop 「数論とエルゴード理論」, 2013-2-9, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
- ② 古門麻貴, Non-Pisot substitutions from Rauzy induction of 4 interval exchange transformations and quasi-periodic tilings, Conference “Subtile 2013”, 2013-1-15, CIRM (フランス)
- ③ 古門麻貴, 伊藤俊次, 斉藤朝輝, 田村純一, 安富真一, A new multidimensional

slow continued fraction algorithm and stepped surface, 共同研究「タイリング空間のトポロジーとその周辺」, 2012-10-4, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

- ④ 古門麻貴, 伊藤俊次, 安富真一, The conditions for generating stepped surfaces in terms of the modified Jacobi-Perron algorithm, 共同研究「タイリング空間のトポロジーとその周辺」, 2012-10-4, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

- ⑤ 古門麻貴, 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, AMS Sectional Meeting AMS Special Session on Tilings, Substitutions, and Bratteli-Vershik Transformations, 2012-3-17, George Washington University (アメリカ)

- ⑥ 古門麻貴, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, Workshop 「数論とエルゴード理論」, 2012-2-17, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)

- ⑦ 古門麻貴, 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, 共同研究「自己相似タイリングの剛性定理とその周辺」, 2011-12-21, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

- ⑧ 古門麻貴, 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, 研究会集「エルゴード理論とその周辺」, 2011-12-9, 大阪大学大学院理学研究科 (大阪府)

- ⑨ 古門麻貴, 伊藤俊次, On the admissible condition of orbits generated by Farey type algorithm with a value function, 2011 年度東京力学系セミナー「夏季集中セミナー」, 2011-8-7, 弘前大学工学部 (青森県)

- ⑩ 古門麻貴, On characteristic polynomials of 4-letter substitutions from Rauzy induction, 2010 年度東京力学系セミナー「夏季集中セミナー」, 2010-9-4, 東京工業高等専門学校 (東京都)

- ⑪ 古門麻貴, 伊藤俊次, The substitutions related to the Rauzy induction on

4-interval exchange transformations and tilings II, Workshop “Substitutive Tiling and Fractal Geometry”, 2010-7-8, Sun Yat sen University (中国)

- ⑫ 古門麻貴, 伊藤俊次, The substitutions related to the Rauzy induction of 4-interval exchange transformations and tilings II, Workshop “Mathematics of Quasi-Periodic Order”, 2010-6-23, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古門 麻貴 (FURUKADO MAKI)

横浜国立大学・国際社会科学研究科・助手

研究者番号 : 20303068

(2) 研究分担者

伊藤 俊次 (ITO SHUNJI)

金沢大学・自然科学研究科・研究員

研究者番号 : 30055321