

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540118

研究課題名(和文) 反応拡散系におけるフロント・パルス波の強い相互作用ダイナミクスの新理論

研究課題名(英文) Semi-strong interactions of front and pulse solutions in reaction-diffusion systems

研究代表者

池田 榮雄 (IKEDA, Hideo)

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号：60115128

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散系におけるフロント進行波，あるいはバック進行波と非一様拡散場との相互作用のダイナミクスを考察した。非一様性の強さに応じて，それによって影響を受ける進行波の様々なダイナミクスを中心多様体上の常微分方程式系に縮約することで，中心多様体上の力学的構造を明らかにした。また，フロント型とバック型の進行波の強い相互作用で得られるパルス進行波と非一様拡散場との相互作用のダイナミクスも縮約系を用い同様の手法で力学的構造を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Dynamics of interactions between traveling front or back waves and the heterogeneity in the media in reaction-diffusion systems are considered. Applying the center manifold theory, we clarify the structure of reduced ODE dynamics on a center manifold, depending on the strength of the heterogeneity.

Furthermore, dynamics of interactions between traveling pulses, which are given by semi-strong interactions between traveling front and back waves, and the heterogeneity are also considered.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学 反応拡散系 非一様拡散場 フロント，パルスのダイナミクス 中心多様体論 縮約系 相互作用 特異摂動法

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形非平衡科学の理論的支柱として研究されている反応拡散系は 1952 年に誕生した。それから 50 年以上経過した現在、その理論は自然科学の様々な分野とのつながりの中で我々の予想以上に発展している。時空間パターンの解析は反応拡散方程式系の理論の一つの重要なテーマであり、研究代表者はこれまで、解析的特異摂動法、力学系理論、分岐理論等を用いて、活性 - 抑制系と呼ばれる反応拡散方程式系における定常解や進行波解の存在、その安定性、及び解の分岐構造解明に力を注いで来た。そしてある程度の結果を得た。現在、それらの結果を踏まえて、発展方程式の解としてのダイナミクスに関する問題（安定な解が多重に存在する時、どの解が選択されるかというパターン選択の問題や安定な解を分けている分水嶺解の存在やその形状に関する問題、非一様な拡散場における解のダイナミクスに関する問題など）を研究中である。これは様々なパターンを形成していく途中の過程（遷移過程）の解明と密接に関係しており、応用上大変重要な問題である。

(2) 多重特異点近傍における解のダイナミクスを調べることが中心課題となる(それは、これらの特異点が全体の組織中心(organizing center)の役割を果たしている)ので、その解析手法としては、中心多様体理論を適用し無限次元空間でのダイナミクスを中心多様体とよばれる有限次元上のダイナミクスに縮約することである。2002 年に連携研究者の栄氏がある程度一般的な枠組みで縮約系を導出することに成功した。しかし、この論文では縮約系の重要な係数は非常に複雑な式で表現されており、具体例に適用しようとする、その係数は数値計算に頼らざるを得なかった。これを計算するには、多重特異点における解の周りでの線形化作用素の(0 固有値に対する)全ての固有関数、共役線形化作用素の全ての固有関数を計算し、さらにそれらを含むある種の積分量を計算する必要がある。そしてこの量が常微分方程式系の係数となり、中心多様体上のダイナミクスを決定している。

2. 研究の目的

(1) 非一様な媒体上の反応拡散系におけるフロント進行波と非一様性の強さとの相互作用のダイナミクス(フロント進行波の通過、停止、反射のメカニズム)を中心多様体上の常微分方程式系に縮約し、力学系理論の視点からそのダイナミクスを完全に解明する。

(2) 強い相互作用を伴うフロント進行波+バック進行波のダイナミクスをより低次元の系に縮約し、それを解析することによって元の反応拡散系のパルス進行波のダイナミクスの全体像を明らかにする。

(3) (2)の結果を用いて、非一様な拡散場におけるパルス進行波のダイナミクス(パルス進行波の通過、停止、振動、反射、分裂などのダイナミクス)を考察する。

3. 研究の方法

(1) 2 成分反応拡散系において、定常フロント波の周りでの線形化作用素が、ある物理パラメータで Jordan 型の特異点(ドリフト分岐点)を持つ場合の全ての固有関数を正確に計算し、それを用いて非一様な拡散場との相互作用を記述する縮約系を正確に導出し、様々なダイナミクスが出現する機構を明らかにする。同時に、様々なダイナミクスを分けている分水嶺解を考察する。

(2) (1)で計算した固有関数を用いて、フロント進行波とバック進行波の強い相互作用のもとでのパルス進行波のダイナミクスを有限次元系に縮約する。第 1 成分に関しては弱い相互作用であるが、第 2 成分に関しては強い相互作用を伴う。第 2 成分は遷移層を持たないが、その取扱いが問題となる。栄氏の先の結果を部分的に修正して、細密化することによって実施する。この縮約系と元の反応拡散系との数値計算による比較を行い、理論の正当性を確認する。

(3) (2)で得られたパルス進行波に関して、非一様性との更なる相互作用のダイナミクス縮約系を導出し、反応拡散系の様々なダイナミクスの力学的構造の解析を行う。すなわち、非一様な媒体における特異点近傍での解のダイナミクス(通過、停止、分裂、振動、反射など)の全体像を明らかにする。

(4) 難しい問題であるが、(3)の方法を空間 2 次元、あるいは 3 成分系に拡張する。

4. 研究成果

(1) 2 成分反応拡散系で、フロント進行波、あるいはバック進行波とステップ型の非一様な拡散場との相互作用のダイナミクスを考察した。非一様性の強さに応じて、進行波が通過 反射 停止 反射となるメカニズムを中心多様体上の常微分方程式系に縮約することで、中心多様体上の力学的構造を明らかにした。非一様性の導入によって、2 つの定常解が出現し、その定常解が非一様性の強さに応じて、ダイナミクスを巧みにコントロールしている。具体的には、2 つの定常解の内、1 つは鞍状点(サドル)であり、もう 1 つは安定渦状点である。停止はこの安定渦状点に引き込まれたからであるが、もう 1 つの鞍状点の安定多様体、不安定多様体が「通過 反射 停止 反射」のコントロールを行っていることを明らかにした。

(2) (1)のダイナミクスの仕分けをしている分水嶺解の解明を行った。上の 4 つの応答の

内、「反射 停止」を分けているのは、鞍状点の1つの安定多様体であり、「停止 反射」を分けているのは、鞍状点のもう1つの安定多様体であることは、縮約系から明らかである。問題は最初の「通過 反射」を分けている分水嶺解である。縮約系を見る限りでは何も分からない。そこで、バンプ型の拡散場を考察することにより、無限遠にある不安定定常解を有限に引き戻すことに成功した。すなわち、バンプの長さ無限に大きくすると、2つのステップ型の拡散場に分かれることを利用した。これにより、「通過 反射」を分けているのは、無限遠にある不安定な定常フロント解の安定多様体であることを示した。

(3) 時定数を持つ2成分反応拡散系で、フロント進行波とバック進行波の相互作用と同時にステップ型の非一様性との相互作用のダイナミクスを記述する縮約系の導出を考察した。第一成分は遷移層を持っているので、フロント進行波 - バック進行波の相互作用は弱いと考えられるが、第二成分は遷移層を持たない解なので、フロント進行波 - バック進行波の相互作用は強くなり、この取り扱いが問題となっている。本研究では、論文 P.H.Heijster, A.Doelman, T.Kaper and K.Promislow, Front interaction in a three-component system, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 9(2010), 292-332. を参考にし、くり込み群の手法を用いて、相互作用のダイナミクスを記述する縮約系を導出した。しかし、理論的には一部、証明に不十分な点があるが、元の反応拡散系の数値計算と導出した縮約系はぴったりと一致することを確認した。時定数を小さくすると、フロント進行波 - バック進行波の相互作用にも関わらず、脈動定常パルス解が現れる。これと空間的非一様性との相互作用の強さに応じて、脈動定常パルス解が持続したり、持続出来ずに2つのフロント進行波とバック進行波に再分裂するなどのダイナミクスが観察される。これらの描像のダイナミクスを縮約系を用いて解析した。時定数の値をもう少し小さくすると、パルス進行波が現れるがこれらは不安定解となっている。

(4) フロント型とバック型の進行波の相互作用を用いて、強い相互作用であるパルス進行波解のダイナミクスに対して繰り込み群の手法を用いると同時に、バンプ型の非一様性を導入することによって、非一様性に対するパルス進行波の4つのダイナミクス(通過 反射 停止 反射)の分水嶺解を明らかにした。数値計算では、カオス的なダイナミクスの存在も確認した。

(5) 2種類のスケールに対して、3成分 FitzHugh-Nagumo 方程式系の空間1次元定常パルス解の存在とその安定性を明らかにした。その結果、3種類の分岐が起こることを

確認した。(i)ドリフト分岐(定常パルス解から進行パルス解が分岐)、(ii)ホップ分岐(定常パルス解から振動パルス解が分岐)、(iii)サドル-ノード分岐(定常パルス解がターンして安定性を交換する)。さらに、これらの3つの特異点での線形化問題の固有関数、共役問題の固有関数などの構成を行い、それを基に特異点近傍での発展方程式の解のダイナミクスを解析した。使った手法は繰り込み群などを利用した縮約理論である。また、途中であるが、非一様性との相互作用の解析も進めている。

(6) 空間2次元一様媒体上での3成分 FitzHugh-Nagumo 方程式系(2活性1抑制因子モデル)の定常パルス解(定常スポット解)の存在を解の構成的手法を用いて証明した。その結果を基に、物理パラメータに関する分岐現象(サドルノード分岐、ドリフト分岐、ホップ分岐)が出現することを確認した。これらの複合分岐点に関しては今後の課題である。さらに、2種類の手法で上記の定常スポット解の安定性解析も行った。

(7) 2餌食1捕食者反応拡散モデルで、2種類の餌食の内、1種は捕食者に対して毒性を持っている場合に関して、3種共存定常解と毒性の関係を調べ、特異極限法を用いて3種共存解の安定性解析を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

S.-I. Ei and T. Ishimoto, Effect of boundary conditions on the dynamics of a pulse solution for reaction-diffusion systems, Networks and Heterogeneous Media, 査読有, Vol.8, No.1, 2013, pp.191-209, <http://www.aimsciences.org/journals/home.jsp?journalID=9>

E. Ijioma, A. Muntean and T. Ogawa, Pattern formation in reverse smoldering combustion: A homogenization approach, Combustion Theory and Modelling, 査読有, Vol.17, No.2, 2013, pp.185-223, <http://www.tandfonline.com/loi/tctm20#.U5AePcKKCUk>

T. Ogawa and T. Okuda, Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance, Networks and Heterogeneous Media, 査読有, Vol.7, No.4, 2012, pp.893-926, <http://www.aimsciences.org/journals/home.jsp?journalID=9>

S.-I. Ei, Dynamics of pulses on a thin strip-like domain in \mathbb{R}^2 , RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B31, 2012, pp.195-210, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyu>

bu/bessatsu.html

H. Ikeda and S.-I. Ei, Front dynamics in heterogeneous diffusive media, Physica D, 査読有, Vol.239, 2010, pp.1637-1649, <http://www.journals.elsevier.com/physica-d-nonlinear-phenomena/>

C.N. Chen, S.-I. Ei and Y.P. Lin, Turing patterns and wavefronts for reaction-diffusion systems in an infinite channels, SIAM J. Appl. Math. 査読有, Vol.70, No.8, 2010, pp.2822-2843, <http://www.siam.org/journals/siap.php>

Y. Morita and T. Ogawa, Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass, Nonlinearity, 査読有, Vol.23, 2010, pp.1387-1411, <http://iopscience.iop.org/0951-7715/>

R. Eymard, D. Hilhorst, H. Murakawa and M. Olech, Numerical approximation of a reaction-diffusion system with fast reversible reaction, Chinese Annals of Mathematics B, 査読有, Vol.31, 2010, pp.631-654, <http://www.springer.com/mathematics/journal/11401>

〔学会発表〕(計16件)

H. Ikeda, 反応拡散系における進行波解とそのダイナミクス, 2013年11月29日, 富山大学, 富山

H. Ikeda, Dynamics of front solutions in heterogeneous diffusive media, 2013 NIMS-KMRS PDE Conference on reaction diffusion equations for ecology and related problems, 2013年10月24日, KAIST, Deajeon, Korea

H. Ikeda, 3変数 FitzHugh-Nagumo 方程式系のスポット解の不安定性について, 研究集会「富山解析セミナー2013」, 2013年10月5日, 富山大学, 富山

H. Ikeda, 3成分 FitzHugh-Nagumo 方程式系の空間1次元, および2次元での局在パターン, 北大MM倶楽部セミナー, 2013年3月6日, 北海道大学, 札幌

H. Ikeda, 3成分 FitzHugh-Nagumo 方程式系の局在パターン, KSU 非線形解析セミナー, 2012年12月11日, 京都産業大学, 京都

H. Ikeda, 3成分反応拡散系の空間2次元パターン, 研究集会「富山解析セミナー2012」, 2012年10月6日, 富山大学, 富山

H. Ikeda, Front dynamics in heterogeneous media, Turing Symposium on Morphogenesis, Mathematical approaches sixty years after Alan Turing, 2012年8月29日, Sendai, Japan

H. Ikeda, Dynamics of traveling fronts in some heterogeneous diffusive media, 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential

Equations and Applications, 2012年7月3日, Orland, Florida, USA

H. Ikeda, Front dynamics in heterogeneous diffusive media, 研究集会「非線形現象に現れる界面運動の数理解析・数値解析」, 2011年7月13日, 京都大学数理解析研究所, 京都

H. Ikeda, Dynamics of traveling fronts in some heterogeneous diffusive media, 19th Workshop on Differential Equations and its Applications, 2011年1月15日, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan

H. Ikeda, 非一様拡散場におけるフロント進行波解の応答, 第7回生物数学の理論とその応用, 2010年11月19日, 京都大学数理解析研究所, 京都

H. Ikeda, Global structure of traveling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems, 研究集会「散逸系の数理」-- 解構造と大域挙動 -- Structures of Attractors in Dissipative Systems, 2010年11月17日, 京都大学, 京都

H. Ikeda, 非一様性と解の分岐現象, 富山解析セミナー2010, 2010年10月2日, 富山大学, 富山

H. Ikeda, 非一様拡散場に現れる様々なダイナミクス, 第4回応用数理解析研究会, 2010年8月19日, ニューサンピア敦賀, 敦賀

H. Ikeda, Traveling Front Dynamics in Some Heterogeneous Diffusive Media, 8th International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010年5月26日, Dresden, Germany

H. Ikeda, 非一様拡散場における進行波解の散乱について, 研究集会「偏微分方程式の最近の話題2010 in 別府」, 2010年4月3日, 別府

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 榮雄 (IKEDA, Hideo)

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号: 60115128

(3) 連携研究者

栄 伸一郎 (EI, Shin-ichiro)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号: 30201362

小川 知之 (OGAWA, Toshiyuki)

明治大学・総合数理学部・教授

研究者番号: 80211811

村川 秀樹 (MURAKAWA, Hideki)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号：40432116



