

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 19 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540119

研究課題名（和文） 準周期タイリングの構成理論とエルゴード理論

研究課題名（英文） The generation of quasi-periodic tilings and Ergodic theory

研究代表者

伊藤 俊次 (ITO SHUNJI)

金沢大学・自然科学研究科・研究員

研究者番号：30055321

研究成果の概要（和文）：Jacobi-Perron アルゴリズム（高次元連分数アルゴリズムの1つ）から生成される3文字のサブスティテューション列がいかなる条件で並んでいるとき、その列を用いて、平面上に準周期タイリングを生成することができるかについて、伊藤・大槻の定理（1994年）が知られている。この研究では、近年新しく生まれた3つの高次元アルゴリズムにおいても、伊藤・大槻の定理と類似の主張が可能であることを示した。

研究成果の概要（英文）：It is known the condition of the digit sequence obtained by the Jacobi-Perron algorithm which generates a quasi-periodic tiling of the plane in Ito-Ohtsuki (1994). In this project, we showed that we can get the analogous result in terms of the new three multi dimensional algorithms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：高次元連分数アルゴリズム，サブスティテューション，タイリングサブスティテューション，フラクタル，準周期タイリング，領域交換変換

1. 研究開始当初の背景

行列 A が $SL(2, \mathbb{Z})$ で、さらに行列 A の固有値 λ_1, λ_2 が、 $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ であるとき、 A からつくられるトーラス \mathbb{T}^2 上の群自己同型変換 $T_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ の Markov 分割 $\xi = \{M_0, M_1\}$ は、 L_A -拡大不変空間 Pc 上の2つの線分 X_1, X_2 、及び L_A -拡大不変空間 Pe 上の2つの線分 Y_1, Y_2 でつくられた2つの矩形 M_0, M_1 として与えられた ([Adler-Weiss])。この結果、「群自己同型変換という幾何学的・代数的変換が、Markov 分割を通して、shift of finite type

な記号力学系と同型となる」という主張は、力学系・エルゴード理論に多大な影響を及ぼすこととなる。それでは、行列 A が $SL(3, \mathbb{Z})$ で、hyperbolic 条件： $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1 > |\lambda_3|$ をもつ群自己同型変換において Markov 分割はどのように構成されるか、が自然に問われてくる。一般の d で、「hyperbolic 条件を満たすものは、必ず Markov 分割が存在する」(by Sinai)、「 $d=3$ のとき、Markov 分割を形成する集合の境界は not-smooth である」(by Bowen) が示された。となれば、その

形を構成的にみてみたく、Arnoux-伊藤は、その構成法を考案した。以上の歴史的背景の中、Jacobi-Perron アルゴリズムのように、そのアルゴリズムからサブステューションの列が生成され、それを用いて平面上に準周期タイリングを生成可能かどうか判定したくなるような、面白いアルゴリズムがいくつか生まれ、当時の新しい課題でもあった。

2. 研究の目的

整数行列 A が $SL(d, \mathbb{Z})$ で、 d が 3 以上のとき、固有多項式が既約で、かつ固有値が hyperbolic 条件： $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1, |\lambda_3| > \dots > |\lambda_d|$ を満たす行列から出発し、行列から定まる線形変換 L_A の拡大不変平面 \mathbb{P}^d 上に、標準基底 $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,d}$ を射影した $\{\pi e_i\}_{i=1,2,\dots,d}$ から生成される dC_2 個の平行し変形をプロトタイプとする準周期タイリングの構成法を確立すること、そして、トーラス \mathbb{T}^d 上の群自己同型変換 $T_A x = Ax \pmod{1}$ の Markov 分割を explicit に構成する理論を確立することを目指すために、サブステューションをつくるアルゴリズムに注目することとなる。サブステューション列を生成するアルゴリズムのうち、当時より関心があったのは、

- (1) Modified Jacobi-Perron アルゴリズム (高次元連分数アルゴリズムの 1 つとしてよく調べられており、このサブステューションを用いたタイリングの生成理論が求められていた)
- (2) 「value 付き」と呼ばれる高次元連分数展開の新しいタイプのアルゴリズム (田村-安富によって考案され、計算機実験上 3 次体と相性がよく、周期的なサブステューション列を生成してくれる)
- (3) Rauzy induction アルゴリズム (4 区間交換変換上の induction アルゴリズムで、non-Pisot 型のサブステューションを生成する意味で大切)

などであり、これらのアルゴリズムから生成されるサブステューション列から平面タイリングの生成理論の構築を目的とした。

3. 研究の方法

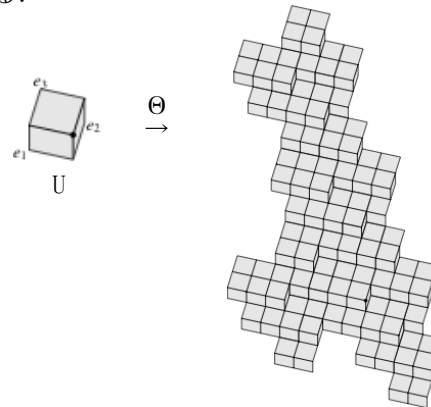
サブステューションの列からタイルのタイリングサブステューションの列をつくり、平面上にタイリングを生成しようとするところから、タイリングサブステューションの幾何学を確立させる必要がある。例えば、連結なパッチ (タイリングの断片) に、タイリングサブステューションを施しても連結かなど、重なりあうことはないかなどについて示すために必要な基礎概念をつくっていく作業は、大変ではあるが、なかなか面白い。一方、タイリング理論を構築しよ

うとすると、膨大なコンピュータシミュレーションなしには、対応できない。まるで実験数学のようで、これも面白い。このようなタイリング構成に関し、フランスの P. Arnoux, V. Berthé, T. Jolivet, A. Siegel などの quasi-periodic 平面タイリングの研究グループと親密な情報交換が行われている。

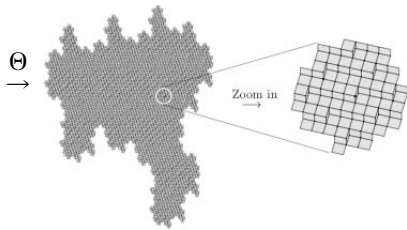
4. 研究成果

(1) Jacobi-Perron アルゴリズム (高次元連分図ウ) から生成される $d=3$ のサブステューション列が、いかなる条件を満たして並んでいるとき、そこから生成されるタイリングサブステューション列からできるパッチ列が、平面上の stepped surface へと成長していくかについて、伊藤-大槻の定理が知られているが、Modified Jacobi-Perron アルゴリズムから生成されるサブステューション列においても、類似なものが得られることがわかった。具体的には、サブステューション列のしくみ、及びタイリングサブステューション列のしくみが完全にわかり、それらを用いて stepped surface からなる平面タイリングを生成する判定条件を与えることに成功した。この成果は、論文「The condition for the generation of the stepped surface in terms of the modified Jacobi-Perron algorithm」として、まとめているところである。

(2) 「value 付き」アルゴリズム (高次元数論的アルゴリズムのうち、連分数型というより Farey 型のアルゴリズム) については、タイリング生成のためのタイリングサブステューションが well-defined であることまでは明らかとなった。この成果は、論文「A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface」としてまとめ、現在投稿中である。今後は、このアルゴリズムを用いて、タイリングが全平面的に生成できるためのタイリングサブステューション列の条件を明記することが急がれる。



(次のページに続く)



上図は、「value 付き」アルゴリズムから生成されたタイリングサブスティテューション Θ の例である。 Θ は、Farey 型タイリングサブスティテューションに分解されている。ここで $\Theta = \Theta_{(2,0)} \Theta_{(0,2)} \Theta_{(2,1)} \Theta_{(2,1)} \Theta_{(0,1)} \Theta_{(1,0)} \Theta_{(0,2)} \Theta_{(0,2)} \Theta_{(1,2)} \Theta_{(2,1)} \Theta_{(1,0)} \Theta_{(1,0)}$ 。この Θ によって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta^n(U)$ は、全平面を覆うようにタイリングすることができるか、判定したい。

(3) 4-区間交換変換上の Rauzy induction からつくられる 4 文字のサブスティテューションから決まる行列は、non-Pisot, 既約, さらに総実であることが一般的である。この中のサブスティテューションの中から、周期 8 のサブスティテューション列を選び、行列不変な拡大及び縮小する 2 つの平面上に、標準ベクトルの射影から生成される 6 個の平行し変形によるタイリングサブスティテューションを定義しようとするとき、必ず重複のあるタイリングサブスティテューションに遭遇してしまう。この重複問題の解消が鍵だが、具体的に、周期 8 のサブスティテューション列の例においては、タイリングを生成可能であることが示された。この成功は、総実でない 4 次 non-Pisot の行列に対して得られたタイリングの結果を、総実の場合のタイリング問題へと拡張できた点で価値がある。4-区間交換変換から導出されるもっと広い総実のクラスでも、タイリングが生成可能であることを示したいところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Pierre Arnoux, 古門麻貴, Edmund Harriss, 伊藤俊次, Algebraic numbers, free group automorphisms and substitutions on the plane, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, vol. 363, no. 9 (2011), pp. 4651-4699
DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05188-3
- ② Pierre Arnoux, 古門麻貴, 伊藤俊次, Substitutions from Rauzy induction on 4-interval exchange transformations

and quasi-periodic tilings, 京都大学数理解析研究所講究録「準周期秩序の数理」, 査読無, 1725 (2011), pp. 152-174

[学会発表] (計 12 件)

- ① 伊藤俊次, The condition of constructing the stepped surfaces in terms of the modified Jacobi-Perron algorithm, 研究集会「Ergodic Theory and Metric Number Theory」, 2012-12-5, 日本女子大学 (東京都)
- ② 伊藤俊次, 古門麻貴, 斉藤朝輝, 田村純一, 安富真一, A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface, 共同研究「タイリング空間のトポロジーとその周辺」, 2012-10-4, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
- ③ 伊藤俊次, 古門麻貴, 安富真一, The conditions for generating stepped surfaces in terms of the modified Jacobi-Perron algorithm, 共同研究「タイリング空間のトポロジーとその周辺」, 2012-10-4, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
- ④ 伊藤俊次, 古門麻貴, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, AMS Sectional Meeting AMS Special Session on Tilings, Substitutions, and Bratteli-Vershik Transformations, 2012-3-17, George Washington University (アメリカ)
- ⑤ 伊藤俊次, 古門麻貴, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, Workshop 「数論とエルゴード理論」, 2012-2-17, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
- ⑥ 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, Workshop “Fractal geometry and Ergodic Theory”, 2011-12-28, Morningside Center of Mathematics (中国)
- ⑦ 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, 共同研究「自己相似タイリングの剛性定理とその周辺」, 2011-12-21, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
- ⑧ 伊藤俊次, Non-Pisot substitutions from RID and quasi-periodic tilings, 研究集

会「エルゴード理論とその周辺」,
2011-12-9, 大阪大学大学院理学研究科
(大阪府)

- ⑨ 伊藤俊次, 古門麻貴, On the admissible condition of orbits generated by Farey type algorithm with a value function, 2011 年度東京力学系セミナー「夏季集中セミナー」, 2011-8-7, 弘前大学工学部 (青森県)
- ⑩ 伊藤俊次, Pisot/non-Pisot substitutions and fractals, Workshop “フラクタルの数学的諸相”, 2011-2-22, かんぼの宿 山代 (石川県)
- ⑪ 伊藤俊次, 古門麻貴, The substitutions related to the Rauzy induction on 4-interval exchange transformations and tilings, Workshop “Substitutive Tiling and Fractal Geometry”, 2010-7-8, Sun Yat sen University (中国)
- ⑫ 伊藤俊次, 古門麻貴, The substitutions related to the Rauzy induction of 4-interval exchange transformations and tilings II, Workshop “Mathematics of Quasi-Periodic Order”, 2010-6-23, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

[その他]

ホームページ

<http://www.shunjiito.com/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 俊次 (ITO SHUNJI)
金沢大学・自然科学研究科・研究員
研究者番号: 30055321

(2) 研究分担者

藤崎 礼志 (FUJISAKI HIROSHI)
金沢大学・電子情報学系・准教授
研究者番号: 80304757

(3) 連携研究者

古門 麻貴 (FURUKADO MAKI)
横浜国立大学・国際社会科学研究科・助手
研究者番号: 20303068