

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 14 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540120

研究課題名(和文) 不動点理論を介した非線形解析・凸解析の究明及び均衡問題・非線形最適化問題への応用

研究課題名(英文) Nonlinear Analysis and Convex Analysis by fixed point theory and its Application to Equilibrium problems and Nonlinear Optimization

研究代表者

厚芝 幸子 (ATSUSHIBA, Sachiko)

山梨大学・教育学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20327761

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、多くの非線形問題を、非線形解析と凸解析を基礎にした非線形問題と捉え、不動点理論を介した非線形解析と凸解析の立場からその非線形問題を研究した。写像の基本性質の研究から始め、写像族の共通 Attractive Point への平均収束定理や強収束定理等を証明した。Hilbert 空間、Banach 空間において、平均を使わないタイプの Halpern type や Browder type 近似法により、uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroup の共通不動点への収束定理を示すなど、多くの非線形問題へ繋がる多くの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：In this study, we obtain many new and important theorems for nonlinear problems in nonlinear analysis and convex analysis by using fixed point theory. For example, we studied common attractive points and proved nonlinear ergodic theorems for nonexpansive semigroups without convexity. And, we proved strong convergence to common attractive points of nonexpansive semigroups. Further, we proved strong convergence theorems for uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroup in Banach spaces by Halpern type and Browder type iterations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：不動点 凸解析 最適化問題 均衡問題 非拡大写像 非拡大半群 イタレーション 収束

### 1. 研究開始当初の背景

非線形数学とコンピュータの急速な進歩とともに、これまで難しいとされていた非線形問題が解けるようになり、非線形問題とその周辺分野に興味を抱く研究者が国外、国内で多くなり、非線形問題に関連する研究集会が国外、国内の各地で開催されるようになってきた。そのような国内外の非線形問題の研究の状況において、特に均衡問題・非線形最適化問題等の非線形問題の研究は計算機と非線形数学の進歩とともに近年注目され、研究されるようになってきたといえる。

不動点理論は非線形数学の中で中核をなすものの1つで、近年めざましく進歩してきた。均衡問題と非線形最適化問題はそれぞれ何らかの非線形写像の不動点の問題と捉えられ、その問題の解をもとめることは不動点近似（不動点を見つけること）に繋がるものである。近年、この非線形問題に関連する研究が盛んになり、意義のある多くの結果が得られるとともに、最適化問題や均衡問題に関連する重要な非線形問題がつぎつぎに生まれた。当研究はそのような背景から、不動点理論を介した非線形解析・凸解析の究明及び均衡問題・非線形最適化問題への応用の研究の必要性を強く感じ、その研究を進めようと考えに至った。

### 2. 研究の目的

均衡問題と非線形最適化問題などの重要な非線形問題はそれぞれ何らかの非線形写像の不動点の問題と捉えられ、その問題の解をもとめることは不動点近似（不動点を見つけること）に繋がるものである。そのような状況を睨み、本研究は、不動点定理・不動点理論に関する非線形関数解析学の基礎理論を体系的に確立し、それを基に不動点近似の研究を進め、不動点近似の1つの体系を築く。さらに、不動点理論・凸解析の立場から均衡問題・非線形最適化問題を再構成して不動点近似へ帰着させる研究をし、均衡問題と非線形最適化問題などの特に最近重要性がわかってきた非線形問題の解をもとめる近似法の1つの体系を数学的に築くことを目的としている。

### 3. 研究の方法

研究目的を達成するための研究計画・方法は大きくわけて次の3つの段階からなる。

(1) 不動点理論に関する非線形関数解析学の基礎理論の確立。

nonspreading mapping, type(P) mapping, firmly nonexpansive type mapping, ハイブリッド写像, 極大単調作用素の擬レゾルベント等まだあまり研究されていないが均衡問題・非線形最適化問題等の非線形問題には有効と見込まれる写像・作用素に対する基礎的性質・基礎的定理の研究も含め、不動点理

論を介して非線形関数解析学および凸解析学の基本定理を見直して既存の結果よりシャープで使いやすい定理に再構成する。このように確立した新たな定理を基に不動点への収束定理に関する非線形関数解析学の基礎理論を確立する。

(2) 不動点をもとめる点列近似法の理論体系の確立。

(1)の基礎理論を基に、(1)で述べた写像・作用素等に対し、Halpern タイプ法, Mann タイプ法, ハイブリッド法等の不動点近似法が適用できないか研究し、さらに shrinking projection 法やその他 extra gradient 法等の最近考案されてまだあまり研究されていないが、均衡問題・非線形最適化問題には有効と見込まれつつある点列近似法を適用し、収束定理を示す。また、使いやすい点列近似法を新たに考え、不動点への収束定理を示す。さらに、写像の不動点集合、均衡解集合、変分問題の解集合の共通部分の点への収束定理を示す。擬射影等の最近導入された非線形射影の性質の研究もし、その基礎性質を用いる工夫をする。その非線形射影に対する不動点近似を研究し、最終的に、より一般的なバナッハ空間での定理まで導く。これらや既に得た不動点理論に関する結果も合わせて総合的に鑑み、不動点をもとめる点列近似法の整理された理論体系を構築する。

(3) 非線形問題の解をもとめる点列近似法の再考察と発展。

不動点近似法各々に対して、収束速度・軌跡に関するシミュレーション・数値解析実験を行い、収束の速さについて考察する。不動点近似法を均衡問題、非線形最適化問題などへ応用する足掛かりを確立するべく、数値解析実験結果も考慮し、(1)(2)で記した理論も用いて、不動点理論・凸解析の立場から均衡問題・非線形最適化問題の解の近似法を再構成し、使いやすい解の近似法を探求する。それにより、不動点近似の理論、応用の双方のさらなる発展をめざす。

### 4. 研究成果

本研究では、不動点定理・不動点理論に関する非線形関数解析学・凸解析学の基礎理論を体系的に確立する研究を行ってきた。さらに不動点理論・不動点近似の立場から非線形最適化問題、均衡問題を再構成し、不動点の存在・不動点近似の研究をすすめるとともに、非線形最適化問題、均衡問題の解への収束定理の確立を目指して研究してきた。具体的には以下の主要な研究成果を得られた。

(1) 不動点集合が空でないという仮定なしでの不動点近似点列の well-defindness

について研究し、さらにその点列が空でないための必要十分条件を確立する定理を得た。

- (2) pseudo-contractive mapping, Hybrid 写像などの均衡問題・非線形最適化問題には有効と見込まれる写像の基礎性質や基礎定理の研究からはじめ、viscosity approximation methods 等によって、それら写像の不動点へ、さらにそれらの写像族の共通不動点への強収束定理を示せた。主なものとしては、Banach 空間における pseudo-contractive mapping に対して viscosity approximation methods を適用し、不動点への強収束定理を示し、またそれが変分不等式の解への強収束定理にもなっている形の定理を示せた。さらに、均衡問題・非線形最適化問題には有効とみなされる条件をみたす pseudo-contractive mapping の族に対しても viscosity approximation methods を用いることで、共通不動点へ、および変分不等式の解への強収束定理を示した。
- (3) 平均の概念も用いない新たな手法による非拡大半群の共通不動点近似の研究し、弱および強収束定理を得た。
- (4) 最近有効性が注目されつつある Pointwise asymptotically nonexpansive mappings の不動点近似の研究をし、この写像族の共通不動点への弱および強収束定理を示した。さらにその点列に関し、不動点集合が空でないための必要十分条件を確立した。
- (5) 非線形問題には有効と見込まれる写像の基礎的性質の研究からはじめ、その写像族の共通不動点への強収束定理を導く研究をした。そして、平均の概念も用いない新たな手法による Browder type の不動点近似法を非拡大半群に適用し、abstract semigroup に対する共通不動点への強収束定理を示した。
- (6) 平均の概念も用いない新たな手法による viscosity approximation methods を非拡大半群に適用し、非拡大半群の共通不動点への強収束定理を示し、変分不等式の解への強収束定理も示した。
- (7) 非線形問題への応用が見込まれる、不動点集合を一般化した attractive point set を非拡大半群に対してあらたに導入し、その基礎性質から研究し、非拡大半群の common attractive point への非線形エルゴード定理も証明した。それにより、非線形問題への応用の足掛かりを築けた。
- (8) 平均の概念も用いない新たな手法による Browder type の不動点近似法の研究はまだあまりされていない状況下で、その研究を進めた。その結

果、abstract semigroup をパラメタとす る Uniformly Asymptotically regular nonexpansive semigroup の共通不動点への強収束定理を Banach 空間で示せた。

- (9) 非線形問題への応用を考え、写像族に対する common attractive point の基礎性質なども研究し、その性質を用いることで、点列近似法による写像族の common attractive point への収束定理を研究した。
- (10) nonexpansive semigroup の共通 Attractive Point への強収束定理を平均を使わないタイプの Halpern type iteration により証明できた。
- (11) Banach 空間において、平均を使わないタイプの Halpern type イタレーションにより、uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroup などの写像族の共通不動点への収束定理を証明できた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 31 件)

Sachiko Atsushiba: and Wataru Takahashi: " Strong convergence theorems for uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups in Banach spaces ", Banach and Function Spaces, 4 (2014), 275-288, 査読有.

Sachiko Atsushiba: Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups by Browder's type iterations, Nonlinear Analysis and Optimization, 3, (2014), to appear (掲載決定), 査読有.

Sachiko Atsushiba: " Strong convergence to common attractive points of uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups ", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, (2014), to appear, (掲載決定)査読有.

Sachiko Atsushiba: " Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups by Halpern's type iterations ", Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 8, to appear, (掲載決定) 査読有.

Sachiko Atsushiba: "Strong convergence to common attractive points of asymptotically regular nonexpansive semigroups", 非線形解析学と凸解析学の研究 (Nonlinear analysis and convex analysis), RIMS Kokyuroku, to appear (掲載決定), 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings by Browder's type iterations", 不確かさと曖昧さの数理, RIMS Kokyuroku, to appear, (掲載決定), 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Nonlinear ergodic theorems without convexity for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", J. Nonlinear Convex Anal., 14 (2013), 209-219, 査読有.

Sachiko Atsushiba; "Browder's convergence for uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups in Banach spaces", 非線形解析学と凸解析学の研究 (Nonlinear Analysis and Convex Analysis), RIMS Kokyuroku, 1841 (2013), 35-41, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Weak and strong convergence theorems for uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups" 非線形解析学と凸解析学の研究 (Nonlinear analysis and convex analysis), RIMS Kokyuroku, 1821 (2013), 115-122, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Strong convergence theorems for uniformly asymptotically regular nonexpansive semigroups by Browder's type iterations" Nonlinear Analysis and Convex Analysis 7 (2012), 11-19, 査読有.

Sachiko Atsushiba: "On the approximating common fixed points and the existence of the common fixed points of nonexpansive semigroups" Banach and Function Spaces 3 (2011), 351-365, 査読有.

Sachiko Atsushiba: "Viscosity approximation methods for fixed points problems" 非線形解析学と凸解析学の研究 (Nonlinear analysis and convex analysis), RIMS Kokyuroku No.1755 (2011), 124-130, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Viscosity approximation methods for families of strictly pseudo contractive mappings and nonself nonexpansive mappings" バナハ空間論の研究とその周辺, RIMS Kokyuroku No.1753 (2011), 82-89, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "On the Approximated sequences and the existence of fixed points of nonlinear mappings" 実解析学シンポジウム報告集 (実解析学シンポジウム 2010) 42(2010), 67-70, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "Hybrid type method による非拡大半群に対する強収束定理と共通不動点の存在について" 非線形解析学と凸解析学の研究 (Nonlinear analysis and convex analysis), RIMS Kokyuroku No.1685 (2010), 138-148, 査読無.

Sachiko Atsushiba: "あるハイブリッドタイプの点列と非拡大写像の不動点の存在について" 非加法性の数理と情報: 凸解析との接点 (Information and mathematics of no-additivity and non-extensivity.: contacts with convex analysis), RIMS kokyuroku No.1683 (2010), 78-83, 査読無.

[学会発表](計 30 件)

Sachiko Atsushiba: "Strong Convergence Theorems for Nonlinear Mappings by Iterative Schemes", 日本数学会 2014 年度年会実函数論分科会, (2014.3.17). 学習院大学(東京都).

Sachiko Atsushiba: "Attractive Points and Weak and Strong Convergence Theorems for Nonlinear Mappings", RIMS 研究集会「不確かさと曖昧さの数理」, (2014.01.08), 京都大学数理解析研究所(京都府).

Sachiko Atsushiba: "Strong Convergence Theorems by Halpern's Type Iterations for Nonlinear Mappings", The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO2013), (2013,12.20), National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, R.O.C., (Invited Speaker).

Sachiko Atsushiba: "Strong Convergence Theorems for Nonlinear Mappings by Halpern's type iterations", RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」 (Nonlinear Analysis and Convex Analysis), (2013 10.10), 京都大学数理解析研究所(京都府).

Sachiko Atsushiba: “Attractive point and convergence theorems for families of nonlinear Mappings”, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会実函数論分科会, (2013.9.24.), 愛媛大学(愛媛県).

Sachiko Atsushiba: “Common attractive points and weak and strong convergence theorems without convexity for nonexpansive semigroups”, The eighth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), (2013,08.04), Hirosaki University, Hirosaki, Aomori, Japan (青森県).

Sachiko Atsushiba: “Nonlinear Mean Convergence Theorems for Nonlinear Mappings”, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会実函数論分科会, (2012.9.20.), 九州大学(福岡県).

Sachiko Atsushiba: “Convergence of Iterative Sequences for Nonlinear Mappings, The Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces2012 (ISBFS2012), (2012,09.13), Kyushu Institute of Technology, Tobata Campus, Kitakyushu, Japan(福岡県).

Sachiko Atsushiba: “Nonlinear Mean Convergence Theorems for Families of Nonlinear Mappings”, The Third Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia2012), (2012.09.03), Kunibiki Messe, Matsue, Japan (島根県).

Sachiko Atsushiba: “Convergence Theorems for Asymptotically Regular Mappings”, RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」(Nonlinear Analysis and Convex Analysis), (2012.8.29), 京都大学数理解析研究所(京都府).

Sachiko Atsushiba: “Convergence Theorems for Asymptotically Regular Nonexpansive Semigroups”, The International Conference on Mathematical Inequalities and Nonlinear Functional Analysis with Applications (MINFAA2012), (2012.07.25), Gyeongsang National University, Jinju, Korea. (Invited Speaker).

Sachiko Atsushiba: “Strong Convergence Theorems for Uniformly Asymptotically Regular Nonexpansive Semigroups”, 日本数学会 2012 年度年会実函数論分科会, (2012.3.28.), 東京理科大学(東京都).

Sachiko Atsushiba: “Fixed point iteration processes for nonlinear mappings”, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会実函数論分科会, (2011.9.28.), 信州大学(長野県).

Sachiko Atsushiba: “Pointwise Asymptotically Nonexpansive Mappings に対する不動点問題”, RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」(Nonlinear Analysis and Convex Analysis), (2011.8.30), 京都大学数理解析研究所(京都府).

Sachiko Atsushiba: “Convergence Theorems for Fixed Point Problems and Variational Inequality”, The International Conference on Nonlinear Mathematics for Uncertainty and Its Applications (NLMUA2011), (2011.09.07), Grand Gongda Jianguo Hotel, Beijing, China.

Sachiko Atsushiba: “Weak and strong convergence theorems for fixed point problems and variational inequality problems”, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2011), (2011.08.02), Pukyong National University (PKNU), Busan, Republic of Korea.

Sachiko Atsushiba: “Viscosity Approximation Methods for Families of Nonexpansive Mappings”, 日本数学会 2011 年度年会実函数論分科会, (2011.3.21.), 早稲田大学(東京都).

Sachiko Atsushiba: “非線形写像の不動点問題に関する収束定理”, RIMS 研究集会「バナッハ空間論の研究とその周辺」, (2011.2.15), 京都大学数理解析研究所(京都府).

Sachiko Atsushiba: “Viscosity Approximation of Common Fixed Points of Nonlinear Mappings in Banach Spaces”, International Conference on Mathematical Analysis 2010 (ICMA2010), (2010.12.07), Tawana Hotel, Bangkok, Thailand.

Sachiko Atsushiba: “On the Approximated Sequences and the Existence of Fixed Points of Nonlinear Mappings”, 実解析シンポジウム 2010, (2010.11.13), 九州工業大学工学部(福岡県).

21 Sachiko Atsushiba: “Approximating Fixed Points of Nonlinear Mappings by Implicit Iterative Sequences”, “The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization(NAO-Asia 2010), (2010, 09. 09), Royal Paradise Hotel & Spa, Patong beach, Phuket, Thailand.

- 22 Sachiko Atsushiba: "On the Sequences by the Hybrid Type Method and the Existence of Fixed Points(ハイブリッド型点列と不動点の存在について)" RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, (2010.08.31), 京都大学数理解析研究所(京都府).

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

厚芝幸子 (ATSUSHIBA Sachiko)  
山梨大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号：20327761

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

平野載倫 (HIRANO Norimichi)  
横浜国立大学・環境情報研究院・教授  
研究者番号：80134815