様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０１２３
研究課題名（和文）トポロジーにおける連続関数の拡張問題への集合論の応用の研究

研究課題名（英文）Set-thoretic approach to the extension problem of continuous functions in topology

研究代表者
大田　春外（Ohta, Haruto）

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：４０１２６７６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，位相空間上の連続関数または連続関数族に関する拡張問題の研究に集合論の最近の成果を応用することである．特に，研究における鍵の１つである Z. Balogh による Dowker 空間の解析を行う．我々は，Z. Balogh の自然な Dowker 空間が可算パラコンパクトでないことに対する elementary submodels を使わない組み合わせ論的証明を与えた（H.Ohta-T.Yorioka, 2012）．さらに，研究の副産物として，任意の自己稠密な可分距離空間が独立部分基底を持つことを証明した（H.Ohta-H.Tsuiki-S.Yamada 2011）．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to apply recent results of set-theory to the extension problem of a continuous function or a family of continuous functions on a topological space. In particular, we analyze the construction of Dowker spaces by Z. Balogh, which is one of key words in the problem. We give a combinatorial proof without using elementary submodels that Balogh's natural Dowker space is not countably paracompact (H. Ohta-T. Yorioka, 2012). Moreover, as by-products, we prove that every dense-in-itself separable metric space has an independent subbase (H. Ohta-H. Tsuiki-S. Yamada).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：位相空間　トポロジー　連続関数　拡張問題　集合論　Dowker 空間

１．研究開始当初の背景

P. Cohenによる連続体仮説の独立性の証明以後，集合論を応用した位相空間論の研究は目覚ましい発展を遂げてきたが，幾何学的トポロジーや代数的トポロジーの研究に集合論が積極的に応用されることはなかった．幾何学的トポロジーの研究の第一人者であるJ.Dydak氏は1996年に「集合論的トポロジーと代数的トポロジーの接点」という副題をもつ論文（註１）を発表し，１の分解の拡張を媒介として，幾何学的及び代数的トポロジーのいくつかの問題が位相空間上の連続関数の拡張問題に翻訳できることを示した．一例として，未解決問題「距離位相を持つ単体的複体への写像に関してホモトピー拡張定理が成立するか」は，次の問題１と同値であることが示された．

問題１．位相空間Xの部分空間A上で定義された任意の点有限１の分解がX上の点有限１の分解に拡張されるとき，単位閉区間との直積空間 A×[0,1]上の任意の点有限１の分解は直積空間 X×[0,1]上の点有限１の分解に拡張可能か．

本研究代表者と連携研究者山崎は 2006 年に上の問題１が，連続体仮説の下では否定解を持つことを証明し（註２），この結果が幾何学的トポロジーに集合論を応用する研究の端緒を開いた．連続体仮説なしで問題１の否定解が得られるか，また，連続体仮説の否定の下ではどのような現象が生じるかを明らかにすることも本研究の当初の目標の１つであった．

また，我々のグループは前年度までの研究において，位相空間上の拡張問題の研究において，Z. BaloghのDowker空間が鍵になるという着想を得た．単位閉区間との直積空間が正規でない正規空間は Dowker 空間とよばれる．現在までに集合論的仮定を用いずに作られたDowker空間は,本質的に1971年のM. E. Rudin による空間と Z.Balogh によって 1996 年から７年間に構成された一連の Dowker 空間族だけである．前者については多くの研究がなされたが，後者については Z.Balogh 自身の論文以外にその研究は皆無であり，2003 年のZ. Baloghの急逝以後，研究は途絶えている．後者が重要であることを示す例を与えよう．位相空間の閉部分空間上の任意の局所有限開被覆が全体空間の局所有限開被覆に拡張できるような正規空間はKatetov空間とよばれる．Katetov 空間に関して，P. C. Przymusinski とM. L. Wageによって1980年に提出された次の２つの未解決問題がある（註３）．

問題２．通常の集合論の公理系 ZFC において，Katetov空間であるDowker空間は存在するか．

問題３．任意の族正規可算 Katetov 空間はKatetov空間か．

本研究代表者は，もし Z. Balogh によるDowker空間がKatetov空間ならば，問題２は肯定解を持ち，もしそうでなければ，問題３は否定解を持つことを見つけた．これらの事実は，Z. BaloghのDowker空間の解析が急務であることを示している．

註１．J. Dydak, Extension Theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology, Topology and its Appl. 74 (1996), 225-258.

註２．H. Ohta and K. Yamazaki, Extension of point-finite partitions of unity, Fund. Math. 191 (2006), 187-199.

註３．P. C. Przymusinski and M. L. Wage, Collectionwise normality and extensions of locally finite coverings, Fund. Math. 109 (1980), 175-187.

２．研究の目的

位相空間の部分空間上で定義された実数値連続関数または１の分解などの連続関数族が全体空間上の連続関数または連続関数族に拡張可能であるための条件に関する問題を，連続関数の拡張問題と総称する．本研究の目的は，幾何学的，代数的，及び集合論的トポロジーにおける様々な連続関数の拡張問題に対して，公理的集合論の成果を応用して解決を試みることである．また，具体的目標として，Z. BaloghのDowker空間の構造の解析を進めることによって，上記の問題２，問題３のような関連する未解決問題にも解答を与えたい．

３．研究の方法

静岡大学と横浜国立大学において，定期的にセミナーを開催して，情報交換・討議を行った．特に，静岡大学においては，Z. Balogh の Dowker 空間に関する討議を集中的に行った．数学的内容は以下の通りである．

(1) 点有限１の分解の拡張可能性に関して，問題１の後で述べた大田，山崎の結果では，補集合がススリン集合でないススリン集合の存在を用いた．同じ結果を連続体仮説を使わずに証明するために，ススリン集合の代わりにボレル階層の低いボレル集合を使うことを構想した．

(2) Z. BaloghのDowker空間が長く他者の研究を拒んでいる理由の１つは，構成後の正規空間 X と単位閉区間との直積が正規でない，すなわち，X が可算パラコンパクトでないことを示す証明に２重の elementary submodel が使用されている点である．それらを使わない証明の方法を探求した．

(3) Z. BaloghのDowker空間の構造を解析するにあたって，具体的目標として，上記の問題２と問題３に加えて，次の問題の解決を目

標とした．

問題４．Z. Blaogh の方法に基づいて直積空間 X^2 が正規であるようなDowker空間を構成できるか．

問題５．距離空間への単射連続写像をもつようなDowker空間は存在するか．

(4) 位相空間 X の部分空間 A が X において C-埋蔵であるとは，A 上の任意の実数値連続関数が X 上に連続に拡張できることをいい,C*-埋蔵であるとは，A 上の任意の有界実数値連続関数が X 上に連続に拡張できることをいう．第1可算公理を満たす C*-埋蔵閉部分空間は C-埋蔵であるかなどの集合論的トポロジーにおける拡張問題について研究する．C*-埋蔵性は正規性と，C-埋蔵性は正規可算パラコンパクト性とよく似た振る舞いをするので，これらの問題は Dowker 空間を構成する問題を局所化した問題であると解釈できる．

研究の役割分担としては，本研究代表者と連携研究者依岡は主に Z. Balogh の Dowker 空間の解析を，連携協力者山崎は集合論的トポロジーにおける拡張問題を，連携研究者山田と玉野は幾何学的トポロジーと代数的トポロジーにおける拡張問題に関する研究を行った．

４．研究成果

(1) Z. Balogh の Dowker 空間の構成は，1996年の最初の Dowker 空間とそれ以後の自然な Dowker 空間とよばれる一連の空間族に分類される．それらはどちらも集合としては，連続体濃度の始数未満の順序数の集合 $\mathfrak{c}$ と有限順序数の集合 ω の直積集合 $\mathfrak{c}\times\omega$ であり本質的には同じ構造を持つ．ただし，後者は前者の本質を抽出して，応用可能なように自由度を高めた構成方法をとっており，位相構造の定義は異なっている．両者ともに，構成された空間が可算パラコンパクトでないことを示す証明は２重の可算 elementary submodel を経由して行われる．本研究代表者と連携協力者依岡は，後者の自然な Dowker 空間に対して elementary submodel を経由しない直接証明を与えた．それを可能にするのは，次の組み合わせ論的な補題である．

補題１ (H.Ohta-T.Yorioka)．非可算な共終性を持つ濃度 κ に対して，$\{c(x):x\in\kappa\times\omega\}$ を $2=\{0,1\}$ への有限関数の集合，H を任意の可算集合とする．このとき，次の３条件を満たす $\delta\in\kappa$ と関数 h が存在する．
(1) $\mathrm{dom}(h)$ は $\delta\times\omega$ の可算集合である．
(2) 任意の $x\in\mathrm{dom}(h)$ に対して，$h(x)$ は $\mathrm{dom}(c(x))$ の部分集合である．
(3) 任意の $\beta\in\kappa-\delta$ と任意の $n\in\omega$ に対して，$y=(\beta,n)$ とおくと，$\mathrm{dom}(h)$ の要素である点 $x=(\alpha,n)$ が存在して，$\mathrm{dom}(c(x))$ と $\mathrm{dom}(c(y))$ の共通部分は $h(x)$ であり，２つの関数 $c(x)$ と $c(y)$ は $h(x)$ 上で一致する．
さらに，$M=(\cup\mathrm{ran}(h))\cup H$ とおくと，次の２条件(4)と(5)が満たされる．
(4) 任意の $x\in\mathrm{dom}(h)$ に対して，$\mathrm{dom}(c(x))$ と M の共通部分は $h(x)$ である．
(5) 集合族 $\{\mathrm{dom}(c(x))-M:x\in\mathrm{dom}(h)\}$ の要素は互いに交わらない．

自然な Dowker 空間の構成と補題1の使い方を述べる．最初に，集合 $X=\mathfrak{c}\times\omega$ の部分集合族 B_0 を次のように定める．

$$B_0=\{\mathfrak{c}\times n:n<\omega\}\cup\{X-\{x\}:x\in X\}.$$

このとき，B_0 から生成される位相 τ_0 は，条件「(*)開被覆 $\{c\times n:n<\omega\}$ は局所有限開細分を持たない」を満たす T_1 位相であるが正規でない．次に，τ_0 を正規にするために，X の互いに交わらない部分集合の対全体の列 $((F^0_\xi,F^1_\xi):\xi<2^{\mathfrak{c}})$ を考え，ξ に関する帰納法によって，集合 $H\subseteq 2^{\mathfrak{c}}$ と $\xi\in H$ に対して，F^0_ξ と F^1_ξ を分離する X の分割 B^0_ξ と B^1_ξ を定める．自然な Dowker 空間は族 $B_0\cup\{B^0_\xi,B^1_\xi:\ \xi\in H\}$ から生成される位相 τ を持つ位相空間 X として定義される．この空間は，自然に正規 T_1 空間である．Z.Balogh のアイデアの鍵は，以上の構成において，τ_0 が満たした上述の条件(*)を τ がまた満たすことである．各点 $x\in X$ と $\xi\in H$ に対して，$x\in B^{x(\xi)}_\xi$ を満たす $x(\xi)\in 2$ が一意的に定まる．このことから，各点 $x=(\alpha,k)\in X$ の任意の基本近傍は，H の有限部分集合 t と $X-\{x\}$ の有限部分集合 K に対して，集合 $\cap_{}\{B^{x(\xi)}_\xi:\xi\in t\}$ と集合 $(\mathfrak{c}\times(k+1))-K$ の共通部分の形をしている．この基本近傍を $V_{\{t,K\}}(x)$ で表す．自然な Dowker 空間 X が可算パラコンパクトでない，すなわち，上の条件(*)を満たすことを示すためには，次の補題を証明すればよい．

補題２． H の任意の可算部分集合 H' に対して順序数 $\beta\in\mathfrak{c}$ と関数 $i:H'\to 2$ が存在して，各 $\xi\in H'$ に対して $\{\beta\}\times\omega\in B^{\{i(\xi)\}}_\xi$ が成立する．

補題２を証明するために，H の可算部分集合 $H'=\{\xi_n:n<\omega\}$ をとる．このとき，２つの関数 t と K を,各 $x=(\alpha,n)\in X$ に対して，$V_{\{t(x),K(x)\}}(x)$ は x のある種のうまい条件を満たす近傍で，$\{\xi_n:j<n+1\}\subseteq t(x)$ を満たすように定義することができる．

Z. Balogh の証明は，ここで，これまでの議論で使用したすべての対象物を含む２重の可算な elementary submodels $M\in N$ をとることによって目的の $\beta\in c$ を得た．一方，我々の証明では，各点 $x\in X$ に対して，関数 $c(x):t(x)\to 2$ を $c(x)(\xi)=x(\xi)$ によって定義して，集合 $\{c(x):\ x\in X\}$ に補題１を適用する．結果として，得られた順序数 $\delta\in\mathfrak{c}$ より十分に大きい $\beta\in\mathfrak{c}$ を選ぶことにより，補題２が証明される．

上記の結果は技術的ではあるが，論文の査

読者からは，Z. Balogh の Dowker 空間の理解を進める上で価値ある研究成果であるとの評価を得た.

註４．補題１は Z.Balogh の最初の Dowker 空間に対しては直接適用できない．研究の途中で，故 M.E.Rudin 教授による最初の Dowker 空間に対する elementary submodel を使わない証明のメモが発見された．これを解読した解説を web ページにおいて公開している.

(2) 問題２～５に関する研究．問題２と３については目に見える進展がなかった．問題４に対しては，本研究代表者と連携研究者依岡および P.J.Szeptycki，W.Weiss 氏との共同研究により 2010 年に肯定解を与えたが，その後，証明に不完全な箇所があることが発見された．現在も研究を継続しているが，証明は完成していない．問題５に対しては，第１段階として，連続体濃度の始数 **c** をカントル集合と同一視した上で，射影 p:**c**×ω→**c** が連続であるような Z.Balogh の Dowker 空間 X を作ること，第２段階として，**c** を可算個の互いに素な Bernstein 集合 B_n に分割し，各 B_n を X のレベル n の集合として配置することにより，射影 p の制限写像を単射にすることを構想した．本研究では，第１段階の証明は完成したが，第２段階の証明を与えることができなかった．しかしながら，問題４と５ともに基本的方針は正しいと考えられるので，研究を継続する予定である.

(3) 実数のグレイコード表現の一般化である位相空間の{0,1,⊥}^ω コード表現に関連して，立木秀樹氏（註５）は，可分距離空間の２進部分基底，proper２進部分基底，独立部分基底等の概念を導入し，独立部分基底を持つ可分距離空間は自己稠密であること，また逆に，カントル集合，区間，ヒルベルト立方体，n 次元球面，n 次元トーラスなどの具体的空間が独立部分基底を持つことを証明した．しかし，任意の自己稠密な可分距離空間が独立部分基底をもつかどうかは未解決であった．本研究の副産物として，本研究代表者と立木秀樹，山田修司氏は共同で，次の定理を証明することによってこの問題に肯定解を与えた.

定理１ (H.Ohta-H.Tsuiki-S.Yamada)．任意の自己稠密な可分距離空間は独立部分基底をもつ.

定理２ (H.Ohta-H.Tsuiki-S.Yamada)．次元 n の任意の自己稠密な可分距離空間は重複度 n の独立部分基底をもつ.

　上記の立木秀樹氏の研究（註５）では，独立部分基底に加えて，proper２進部分基底の非冗長性を表現する２つの部分基底の概念が与えられた．本研究では，さらに１つの部分基底の概念を定義することによって，それらの間の関係を調べた.

　その後，本研究代表者と立木秀樹，山田耕三氏との共同研究により，自己稠密とは限らない一般の可分距離空間に対して，定理１と２の一般化である次の定理を証明した.

定理３ (H.Ohta-H.Tsuiki-K.Yamada)．任意の可分距離空間 X には，X の proper２進部分基底で X の導集合上では独立部分基底であるものが存在する.

定理４ (H.Ohta-H.Tsuiki-K.Yamada)．次元 n の任意の可分距離空間 X には，重複度 n の X の proper２進部分基底で X の導集合上では独立部分基底であるものが存在する.

註５．H. Tsuiki, Dyadic subbases and efficiency properties of the induced {0,1,⊥}^ω-representations, Topology Proceedings, 28(2004),673-687.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>H. Ohta</u>, H. Tsuiki and K. Yamada, Every separable metrizable space has a proper dyadic subbase, Cornell Univ. Library, arXiv:1305.3393 (2013). 査読無.
http://arxiv.org/abs/1305.3393.

② <u>H. Ohta</u> and T.Yorioka, Elementary submodel arguments in Balogh's Dowker spaces, Topology Proceedings,40 (2012), 289-296. 査読有.

③ <u>H. Ohta</u>, H. Tsuiki and S. Yamada, Independent subbases and non-redundant codings of separable metric spaces, Topology and its Applications, 158 (2011),1-14. 査読有.

〔学会発表〕（計２件）

① <u>大田春外</u>，依岡輝幸，Elementary submodel arguments in Balogh's Dowker spaces，日本数学会２０１１年度秋季総合分科会，２０１１年９月２８日，信州大学理学部.

② <u>大田春外</u>，依岡輝幸，P.J.Szeptycki，W.Weiss，遺伝的正規な閉包を持つ Dowker 空間の構成，２０１０General Topology シンポジウム，２０１０年１２月２１日，筑波大学.

〔図書〕（計１件）

① <u>大田春外</u>『はじめての集合と位相』日本評論社，２０１２年８月，261 ページ.

〔その他〕
ホームページ等

http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~echohta/
welcome.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　大田　春外 (OHTA HARUTO)
　静岡大学・教育学部・教授
　研究者番号：４０１２６７６９

(2)連携研究者
　山田　耕三 (YAMADA KOHZO)
　静岡大学・教育学部・教授
　研究者番号：００２００７１７
　玉野　研一 (TAMANO KEN-ICHI)
　横浜国立大学・大学院工学研究院・教授
　研究者番号：９０１７１８９２
　山崎　薫里 (YAMAZAKI KAORI)
　高崎経済大学・経済学部・教授
　研究者番号：８０３０１０７６
　依岡　輝幸 (YORIOKA TERUYUKI)
　静岡大学・理学研究科・准教授
　研究者番号：６０４３２１９２