

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 3日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540127

研究課題名（和文） 二次元揺動理論の数理物理・保険科学への応用

研究課題名（英文） Application of two-dimensional fluctuation theory to mathematical physics and actuarial science

研究代表者

磯崎 泰樹 (ISOZAKI YASUKI)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授

研究者番号：90273573

研究成果の概要（和文）：二次元安定レヴィ過程が平面内の半直線に初めて到達するときの分布を研究し、平面内の平行な2本の直線への初到達場所の分布を求めた。更新理論にあらわれる、ある測度の族の弱収束を詳しく調べた。更新測度の密度に対し、既知の結果よりも次数の高い誤差評価に成功した。ラチェットつきブラウン運動の動き全体を記述するスコロホッド型方程式を研究した。

研究成果の概要（英文）：We studied the joint distribution concerning the first hitting time/place of a half line or parallel two lines in the plane by a two-dimensional stable Levy process. We studied the weak convergence of a family of probability distributions arising in the renewal theory. We obtained a better error term for the asymptotic behavior of the renewal density. We characterized the “Brownian motion reflecting at the integer-valued ratchet” by the family of equations of the Skorohod type.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：(1) 確率論 (2) 揺動理論

1. 研究開始当初の背景

DLA(拡散律速凝集)とは、溶液からの溶質の析出において、凝固熱の拡散の遅さが析出の速度を規定する場合に、析出した溶質が結晶格子にならずに、シダやヒノキの葉のような複雑な形になることから注目を集めた現象である。

この形状を記述するパラメータとしては、ハウスドルフ次元が代表的である。

DLAの数理モデルとして、格子の点の有限集合を溶質のクラスタとみなすモデルが提案された。格子の上を動くランダムウォークが、既に形成されたクラスタの隣接点に到達したら、そのクラスタに参加したと解釈し、次に新たに十分遠い点からランダムウォーク

を出発させ、同じ手順を繰り返すことによって、クラスタを成長させるのである。この DLA モデルにより形成されるクラスタのハウスドルフ次元については、物理学者による研究が多くあり、数値実験などの方法により、或る次元が予想されている。数学的な厳密さをもった証明には誰も至っていないが、ある次元以上、ある次元以下であることは証明されている。このとき、米国コーネル大学の Lawler らにより、極端な形状としての、半無限直線へランダムウォークが初めて到達する時刻が利用された。

研究代表者はこれまで、確率過程の初到達時刻を解析する手法として知られる揺動理論を、初到達時刻・場所・その他詳細情報を含むように拡張してきた。この「二次元揺動理論」を、ランダムな初期条件を持つ非粘性バーガス方程式の解が持つ、不連続点に関する漸近評価や、ブラウン運動の揺動型汎函数の初到達時刻・場所などの漸近評価に適用することができた。

その一つの結実が、2006年に発表した論文であり、時刻ゼロで正の半直線に質量が一樣に分布している場合に、各点でランダムな初速を与え、完全非弾性衝突のメカニズムの元で、始めは真空だった負の半直線へと噴出させる様子を記述した。

このように、数理物理における確率モデルにとって、確率過程の漸近評価が重要であることは、研究代表者のこれまでの研究においても、しばしば主題となることである。

2009年に発表した論文では、二次元へと拡張した揺動理論を、半無限直線へ二次元ランダムウォークが初めて到達する時刻および到達場所、さらにそれ以前に直線の反対側に滞在した回数など、詳細情報に対する漸近評価を得るのに応用した。平面内の半無限直線へのランダムウォークの到達は、DLA クラスタのうち、針状に突き出た部分への付着を理想化したものに相当する。

2009年の別の論文では、上記の研究を拡張し、連続時間の類似した性質を持つ確率過程、すなわち二次元ブラウン運動でも、半直線への初到達時刻・場所をふくむ詳細情報に関連する漸近評価を得た。この研究では、連続時間での二次元揺動理論を活用した。

他方、保険科学の分野においても、揺動理論の応用例として有名なものがある。損保会社が、確定的かつ連続的に保険料収入を得ながら、突発的かつランダムに生じる災害給付金の支払い義務によって、破産に追い込まれる確率の研究である。

数学的には、ダム水位が放流と大雨によっ

て変動する場合の決壊確率や、客がサービスを受ける窓口での待ち人数の時間発展とも密接に関連しており、広範な研究が行われてきた。しかし、ながら、研究代表者が開発してきた手法である二次元揺動理論は、まだ適用されていない。

2. 研究の目的

本研究では、DLA モデルをはじめとする数理物理学のモデルおよび、損保会社の破産確率などの保険科学の問題への、揺動理論の応用を目指す。ここでいう揺動理論とは、研究代表者が二次元へと拡張し、諸問題に応用するという努力を重ねてきたものである。

揺動理論において、初到達時刻が扱えることは広く知られているが、追加的情報を含む二次元版の定理は、申請者以外では、ランダム初期条件のバーガス方程式の研究者が応用した例があるのみで、保険科学の諸問題への適用例はない。

それとは別に、最近の研究成果を、既存の諸理論と結びつける可能性を探る。いくつかの数式は、有名な公式と似た形をしているので、似た構造を発見することを目的とする。

2010年1月に発表した論文で導入した、変形版ポテンシャル諸量は、他の量と、どのようにつながっているか、明確になっておらず、もしこの方向で新たな結果が出れば、広く知られたポテンシャル理論に、新たな知見を付け加えることになる。

さらに、数理物理学・保険科学の問題意識を持つことにより、揺動理論の新たな拡張の方向性が見えてくる可能性を期待している。

3. 研究の方法

本研究では、これまでの研究成果を、文献調査・シンポジウム出席・計算機シミュレーション・多くの分野の研究者との交流により収集した情報と関連付けて検討することにより、新たな研究成果を目指す。

本研究は、関連分野の研究者が多数在籍する所属研究機関の利点を生かして、申請者が一人で遂行する。研究費は計算機経費・図書購入費・旅費に支出する。恒常的な分担者・連携研究者を設けないものとする。

本研究の前半では、二次元揺動理論から得られる漸近評価・極限定理が、DLA モデル、損保会社の破産問題、さらには各種の数理物理モデルに、どのような結論を与えるかを検討する。ならびに、二次元揺動理論を利用して得られた最近の研究成果を、既存の諸理論と結びつける可能性を探る。

この目的のために、DLA モデルに関する、数

理物理学・確率論における研究成果、そして破産問題に関する保険科学・確率論における研究成果を調査するとともに、計算機を用いたシミュレーションを行って、DLAモデルとリスク過程が持ちうる統計的性質を探る。

幸い所属研究機関では、それらの分野の研究者と接触したり、議論したりする機会が多くある。数学と物理学の共同のプログラムが数年にわたり（2003年から2007年まで数物共同の21世紀COEプログラム、2008年からは大学院GP）継続的に行われており、数十名の物理学者と数十名の数学者が加わっている。

これとは別に2006年からは、理学・経済学・基礎工学・情報科学の各研究科が共同で設立した金融・保険教育研究センター（主として数学と経済学の専任教員20名以上、特任教員が数名）にて申請者が兼任するなど、接触の機会が多く確保されており、本研究に資する面が大きいと期待される。

本研究の後半では、関連分野への有益な知見をあたえるためには、揺動理論の定理がどのような情報を盛り込めばよいかという見地からの定理の拡張を試みる。

さらに、それまでに得た漸近評価・極限定理を、界面モデルや非一様な媒質など、申請者が研究した経験を持つ各種の数理物理モデルの解析に応用することを目指す。それらの問題に特徴的に現れる確率過程のあいだの関連性を探索する。

そこで得られた関係を通じて、研究代表者がこれまで研究してきたブラウン運動・ランダムウォークの汎関数の評価が、なにを導くかを検討する。

4. 研究成果

(1)

連続時間の確率過程の中では、ブラウン運動に次いで重要とされる、安定レヴィ過程を研究した。この確率過程は、スケールング則を持つジャンプにより動くものであり、ジャンプの発生頻度は、レヴィ指数と呼ばれる量で特徴づけられることが知られている。ポテンシャル理論に登場するいくつかの量を、安定過程の汎関数で変形したものを解析することにより、二次元安定レヴィ過程が平面内の直線に初めて到達する場所の分布を特定した。それは、密度がレヴィ指数を含む簡便な公式で与えられるような確率分布だった。二次元ブラウン運動の場合には、平面内の直線に初めて到達する場所の分布がコーシー分布であることは、有名だったが、この公式はその場合を真に含む拡張でもあり、

コーシー分布の必然性の説明をも与える。さらに連続時間での二次元揺動理論を安定レヴィ過程に応用することにより、平面内の半直線へ初めて到達する時刻および到達場所、さらにそれ以前までの半直線の反対側での局所時間などの詳細情報に関する漸近評価を得た。この漸近評価が含む、特徴ある定積分は、公式集にも載っていないものだった。

(2)

二次元ブラウン運動を、平面内の平行な2本の直線にはさまれた点から出発させると、初到達場所の分布がガウス核の交代級数であらわされ、それがテータ級数に変形可能であることが知られている。(1)の方法を使って、二次元安定レヴィ過程による、平面内の平行な2本の直線への初到達場所の分布を求めると、ある交代級数であらわされ、これは二次元ブラウン運動の場合と類似した形を持つことがわかった。

つまり、テータ級数を安定過程まで拡張しているが、この結果をテータ級数が満たす諸等式と結び付けて研究することは、まだできていない。

(3)

更新理論は、保険科学において、リスクの解析のための中心的な役割を果たしている。本研究では、更新理論の証明の中で重要な役割を果たす、ある測度の族の弱収束を詳しく調べた。

その結果、これまで知られていたよりも広範な測度族の弱収束を得るとともに、既知の弱収束をもたらしていた主因を明らかにできた。

(4)

更新理論の主たる帰結は、更新測度がルベグ測度に漠収束することと、その収束に関する誤差評価である。更新測度の密度については、定数に収束するのと同値であるが、密度は微係数であるが故の困難が伴う。本研究では更新測度の密度に対し、既知の結果よりも次数の高い誤差評価に成功した。その手法は、(3)でも研究した弱収束を利用してフーリエ変換で表示する式を得て、収束を考える変数範囲以外での値を変更することで、扱い易い可積分関数のフーリエ変換に帰着させることである。

(5)

ラチェットつきブラウン運動とは、一次元ブラウン運動が自然数に達するごとに、その値よりも上向きに反射されるような変更を、一次元ブラウン運動に加えた確率過程であり、数理物理学・数理生物学において、興味の対象

象であり続けてきた。またラチェットは、最低保証付き保険商品にも応用されている変更の方式である。

既存の研究では、ラチェットつきブラウン運動の記述方式は、隣接する自然数への到達時刻の間の動き方を直感的に指定する方式だった。本研究では、ラチェットつきブラウン運動の動き全体を記述するスコロホッド型方程式を案出し、さらに、この方程式に従う確率過程の一意存在を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① 磯崎泰樹、A property of the Fourier transform of probability measures on the real line related to the renewal theorem, Proceedings of the Japan Academy, 88 Ser.A, 152—155, 2012、査読あり

② 磯崎泰樹、Hitting of a line or a half-line in the plane by two-dimensional symmetric stable Levy processes. Stochastic Processes and their Applications 121, 1749—1769, 2011、査読あり

[学会発表] (計 1 件)

① 磯崎泰樹、 $1/\cosh(x)$ の部分分数展開の確率論的解釈と拡張、大阪大学理学研究科数学専攻談話会、2011年1月31日、大阪大学理学研究科数学専攻

6. 研究組織

(1) 研究代表者

磯崎 泰樹 (ISOZAKI YASUKI)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授
研究者番号：90273573

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：