

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 15 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2010 ~ 2012

課題番号：22540132

研究課題名（和文） 一次元広義拡散過程の非正則極限

研究課題名（英文） Non regular limits of one-dimensional generalized diffusion processes

研究代表者

富崎 松代 (TOMISAKI MATSUYO)

奈良女子大学・副学長

研究者番号：50093977

研究成果の概要（和文）：一次元広義拡散過程の非正則極限が出現する現象について考察した。尺度関数列、速度測度関数列の極限が共通の不連続点をもつ場合に、対応するグリーン関数の収束を観察することにより、推移確率の収束と極限過程を明らかにし、双一般化拡散過程が極限過程として出現することを示した。また、境界条件が一次元広義拡散過程の調和変換に対して与える影響の解明や、集団遺伝学におけるモラン・モデルに対する極限定理も示した。

研究成果の概要（英文）：We considered the phenomena where we have non regular limits of one-dimensional generalized diffusion processes. When the limit of scale functions and that of speed measure functions have common discontinuous points, we proved the convergence of transition probabilities and showed that the limit process can be a one-dimensional bi-generalized diffusion process, by means of convergence of Green functions. We also investigated the effect of boundary conditions on harmonic transform of one-dimensional generalized diffusion processes. Further we showed some limit theorems for Moran model in population genetics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：広義拡散過程、双一般化拡散過程、出生死滅過程、モラン・モデル、調和変換、

1. 研究開始当初の背景

1970年代後半から、ディリクレ形式と対応するシュレディンガー作用素、半群の列の収束問題の研究が盛んに行われ、その中から、変形ブラウン運動の列の収束問題が生まれてきた。このような研究の場合、あるクラスを設定し、その中で収束の議論をする。従って、極限もまたそのクラスの中にある。その

ような研究の流れの中で、Albeverio, Kusuoka and Streit (1986)において示された例は、極限がそれまでにない新しい形のディリクレ形式に対応している点が注目された。Albeverio, Kondratiev and Rockner (2003)は変形ブラウン運動のある種の収束問題について論じた。そこでは、密度関数の滑らかさを仮定していないが、極限過程は、極限関数が退化していない集合上でのみ考察され

ている。そこで、極限関数が退化している場所では、どのような現象が起きるかが問題になる。

Takemura (2009) は、斜積拡散過程列を考察し、基礎測度が退化する場合に、極限過程の標本路が基礎測度の台の境界でジャンプする現象を引き出した。Takemura と研究代表者は、そのような極限過程のフェラー性について考察し、境界の状態がフェラー性に与える影響を解明した。

上述の極限過程では、標本路の挙動など大変興味深い現象を見出すことができるが、一方で、非特異な領域上で定義された確率過程であることから、それを特徴づけるディリクレ形式の表現は（複雑なものであっても）一意的に定まる。

では、「非特異な領域上の確率過程」という枠組みを外した時に、どのような現象が生じるのか。どのような極限の確率過程が出現するのか、そして、その収束の意味はどのようなものであるか、そもそも、収束するようなものが取り出せるのか、等の問題が浮かび上がってきた。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時における研究目的は、特異な区間上の広義拡散過程の考察であり、具体的には、ディリクレ形式のスムーズ測度とエネルギー測度が同時に変化するとき極限として現れる現象に対して、設定した境界条件がどのような影響を与えるかという問題の解明を目指した。一次元広義拡散過程を取り扱うことから、スムーズ測度とエネルギー測度が同時に変化するという状態は、尺度関数と速度測度関数から導かれる二つの測度の列の変化として表現することが出来る。後者の二つの測度の列が与えられたとき、対応する一次元広義拡散過程の列の収束問題の研究は盛んに行われており、特に、二つの測度が絶対連続である場合は変形ブラウン運動の収束問題として取り扱われ、多くの研究者がこの問題に取り組んできた。本研究でも、先行研究の変形ブラウン運動の場合と同様に、絶対連続な密度を持つ場合から始めることとした。変形ブラウン運動に関する多くの研究では、その密度の列の収束に対して、比較的強い条件を課してきた。しかし本研究ではそのような条件を設定せずに、一次元広義拡散過程の収束の意味、極限は何か、境界条件の影響の解明を目指すこととした。

3. 研究の方法

研究の目的で述べた内容に対し、以下の方法で研究を行うこととした。

(1) 調和変換の研究

変形ブラウン運動の生成作用素は、調和関数を用いた変換後の拡散過程の生成作用素と類似している。一次元広義拡散過程の調和変換の理論を確率過程論の立場から見直し、変形ブラウン運動に適用可能な理論展開を探る。また、Iizuka, Maeno and Tomisaki (2007) では、境界条件が調和変換後の確率過程のマルコフ性に大きな影響を与えることを示した。マルコフ性が壊れる状況について、確率過程論の立場から考察する。

(2) 双一般化拡散過程としての非正則極限についての考察

一次元広義拡散過程の列に対し、「非特異な領域上の確率過程」という枠組みを外して、極限の確率過程について考察する。Ogura

(1989) による双一般化拡散過程の理論の大前提は、尺度関数と速度測度関数が共通の不連続点を持たないことである。しかし、興味ある現象を示す例では、尺度関数と速度測度関数が共通の不連続点を持っており、双一般化拡散過程の理論をそのまま適用することは出来ない。尺度関数と速度測度関数が共通の不連続点をもつ場合に、確率過程の収束の状況と極限過程について考察する。

Takemura (2011) は、一次元広義拡散過程と球面上のブラウン運動の斜積として表現される確率過程の時間変更過程の列を考察し、極限過程として、異なる球面間をジャンプする確率過程が出現する可能性があることを証明した。しかし、この極限過程のジャンプ測度が一次元広義拡散過程のどのような特性量によって特徴づけられるのかが解明されていない。この問題を解明することは、本研究課題を多次元で捉える場合の研究の手掛かりになると判断し、平成 23 年度からこの側面からの研究方法を新たに追加した。

Iizuka and Ogura (1991) は、集団遺伝学における拡散モデルの列に対し、双一般化極限確率過程を考察した。これにより、集団遺伝学における問題を解決しただけでなく、双一般化拡散過程の理論の有効性を示した。本研究課題においても、尺度関数と速度測度関数が共通の不連続点をもつ場合に、出生死滅過程として定式化される集団遺伝学モデルに対して極限定理の考察を行うことにより、本研究課題の応用研究の展開が期待される。この理由により、平成 23 年度から集団遺伝学の側面から本研究課題を捉える研究方法を新たに追加した。

4. 研究成果

研究の目的と研究の方法で述べた内容に対し、以下の研究成果を得た。

(1) 調和変換の研究

①有限状態空間をもつ出生死滅過程において、一方の境界に他方の境界より先に到達するという条件を課すことにより誘導される確率過程（条件付き確率過程）がマルコフ性を保存するかどうかについて、確率論的手法を用いて考察した。先に到達する境界が「吸収壁／反射壁」であるかにより、「マルコフ性を保存する／マルコフ性が壊れる」という興味ある成果が得られた。応用の分野では反射壁の場合が取り扱われることが多い。そのような場合の条件付き確率過程がマルコフ性を有しないことを示すことにより、様々な確率計算を行う際の注意を喚起した。さらに、反射壁の場合の条件付き確率過程の推移確率に対して、境界への到達確率等を用いて具体的な表示を与えた。

②一次元広義拡散過程の調和変換により、変換前の確率過程のどのような性質が変換後の確率過程にいかん反映されるのかは、大変興味ある問題である（上記①で取り扱った問題もその一つである）。本研究では、大域的な性質に焦点をあてて、本質的に異なる確率過程に変換されるための条件について考察した。変換前も変換後も再帰性を有するための必要十分条件は、変換に関わる調和関数が正の定数関数であること等の条件を得た。

③拡散過程の局所時間の逆関数がつくる確率過程はジャンプを有するレヴィ過程である。拡散過程の調和変換として得られる確率過程に対して、ジャンプの割合を記述するレヴィ測度の密度の構造を明らかにした。

④調和解析の考え方と手法に基づいた新たな観点から、既に得られている結果の見直しを行い、汎用性のあるものを引き出した。

(2) 双一般化拡散過程としての非正則極限についての考察

①尺度関数、速度測度関数が退化していくような一次元広義拡散過程の列の極限について考察した。拡散係数が退化し、ドリフト係数がある点でヘルダー連続である場合、尺度関数列と速度測度関数列の極限はこの点で共通の不連続性を持つ。Ogura (1989) による双一般化拡散過程の理論を適用できないために、新たな視点から極限過程について考察を行い、これまでと異なる収束の状況を示した。即ち、尺度関数列、速度測度関数列の極限が共通の不連続点をもつ場合に、グリーン関数の収束の視点から極限過程についての考察を行った。これにより分布の収束と極限過程の状況が明らかになり、退化する拡散

項と発散するドリフト項をもつ生成作用素によって特徴づけられる一次元広義拡散過程の分布の極限を確定した。

②一次元広義拡散過程と球面上のブラウン運動の斜積として表現される確率過程の時間変更過程の列の極限過程として、異なる球面間をジャンプする確率過程が出現する場合がある。この極限過程のジャンプ測度を求める解析的な手法を示した。

③集団遺伝学における代表的な確率モデルである Moran・モデルは出生死滅過程として定式化される。このモデルは拡散モデルで近似される。この拡散モデルの強自然淘汰・弱突然変異極限として得られるマルコフ過程を、直接的に Moran・モデルの強自然淘汰・弱突然変異極限として得ることができるかの考察を行った。その結果、Moran・モデルの尺度関数と速度測度関数が一次元双一般化拡散過程の尺度関数と速度測度関数に収束することを用いて、Moran・モデルの強自然淘汰・弱突然変異極限は、対応する拡散モデルの強自然淘汰・弱突然変異極限と一致することを証明した。さらに、集団遺伝学におけるある種の多次元確率モデルの境界近傍での挙動に関する解析を行った。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計4件）

① M. Tomisaki and M. Iizuka, Weak mutation limits of the Moran model in population genetics, Ann. Reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University, vol.28, 査読有, 2013, 1-12.

<http://hdl.handle.net/10935/3338>

② T. Takemura and M. Tomisaki, h transform of one-dimensional generalized diffusion operators, Kyushu Journal of Mathematics, vol.66, 査読有, 2012, 171-191.

DOI:10.2206/Kyushujm.66.171

③ T. Takemura and M. Tomisaki, Recurrence/transience criteria for skew product diffusion processes, Proceedigs of the Japan Academy, Vol.87, Ser. A, no.7, 査読有, 2011, 119-122.

DOI:10.3792/pjaa.87.119

④ M. Iizuka and M. Tomisaki, Conditional processes induced by birth and death processes,

International Journal of Mathematics
and Mathematical Sciences,
Volume 2010, Article ID 784567, 査読有,
2010, 24 pages.
DOI:10.1155/2010/784567

〔学会発表〕(計 13 件)

- ① M. Tomisaki,
Intrinsic ultracontractivity and semismall
perturbations for skew product diffusion
operators,
Recent topics on Markov processes,
2013 年 2 月 10 日, 奈良女子大学 (奈良)
- ② M. Iizuka,
集団遺伝学に現れる確率モデルの弱突然変
異極限,
Recent topics on Markov processes,
2013 年 2 月 10 日, 奈良女子大学 (奈良)
- ③ T. Takemura and M. Tomisaki,
Lévy measure density corresponding to
inverse local time,
"Stochastic Analysis and Applications"
German-Japanese bilateral research
project,
2012 年 9 月 27 日, 岡山大学 (岡山)
- ④ T. Takemura and M. Tomisaki,
Lévy measure density corresponding to
inverse local time,
日本数学会 2012 年度秋季総合分科会,
2012 年 9 月 18 日, 九州大学 (福岡)
- ⑤ M. Iizuka,
The effects of back mutation on
compensatory molecular evolution,
2012 年 9 月 12 日,
ミュンヘン大学バイオセンター (ドイツ)
- ⑥ T. Takemura and M. Tomisaki,
Lévy measure density corresponding to
inverse local time,
6th International Conference on Stochastic
Analysis and Its Applications,
2012 年 9 月 11 日, Conference Center in
Będlewo (ポーランド)
- ⑦ Y. Moritoh,
Minkowski の定理の一般化(1950, H. P.
Mulholland) に関する話題,
Ideas and Methods of Harmonic Analysis,
Nara (3),
2012 年 6 月 20 日, 奈良女子大学 (奈良)
- ⑧ M. Tomisaki,
一次元拡散過程の非正則な拡散過程への収
束について,
非正則な拡散過程における諸問題,
2012 年 1 月 29 日, 奈良女子大学 (奈良)
- ⑨ T. Takemura and M. Tomisaki,
一次元広義拡散過程の h 変換,
日本数学会 2011 年度秋季総合分科会,
2011 年 9 月 28 日, 信州大学 (松本)

- ⑩ M. Iizuka,
Conditional processes induced by
one-dimensional generalized
diffusion processes related to stochastic
models in population genetics,
5th International Conference on
Stochastic Analysis and its Applications,
2011 年 9 月 9 日, ボン大学 (ドイツ)
- ⑪ T. Takemura and M. Tomisaki,
Recurrence/transience criteria for skew
product diffusions,
5th International Conference on Stochastic
Analysis and its Applications,
2011 年 9 月 8 日, ボン大学 (ドイツ)
- ⑫ M. Iizuka,
Models of compensatory molecular
Evolution,
Annual Conference of Society for Molecular
Biology and Evolution,
2011 年 7 月 27 日, 京都大学 (京都)
- ⑬ M. Tomisaki,
 h transform of one dimensional generalized
diffusion operators,
4th International Conference on Stochastic
Analysis and its Applications,
2010 年 8 月 31 日, 関西大学 (大阪)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

富崎松代 (TOMISAKI MATSUYO)
奈良女子大学・副学長
研究者番号: 50093977

(2) 研究分担者

飯塚勝 (IIZUKA MASARU)
九州歯科大学・歯学部・准教授
研究者番号: 20202830

森藤由美 (MORITOH YUMI)
奈良女子大学・理学部・特任助教
研究者番号: 80611128

(3) 連携研究者