

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 7 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540133

研究課題名（和文） 集合値計画法における制約想定と求解法の研究

研究課題名（英文） Research on constraint qualification and solution method for set optimization programming

研究代表者

黒岩 大史（KUROIWA DAISHI）

島根大学・総合理工学研究科・教授

研究者番号：40284020

研究成果の概要（和文）：

集合値計画法における制約想定の研究を行い、集合値凸関数を用いた集合値計画問題に対する最弱の制約想定をはじめとして、いくつかの集合値計画問題に対する制約想定を導入した。また求解法に関して良設定の集合値計画問題の研究を行った。

研究成果の概要（英文）：We study constraint qualification for optimization problems whose objective maps are set-valued maps based on criteria called ‘set optimization.’ We propose certain constraint qualifications for set optimization problems including a set optimization problem whose objective and constraint functions are set-valued convex functions. Also we study solution methods for well-posed set optimization problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：集合値最適化、微分概念、多目的最適化、数理計画法、集合値計画法

## 1. 研究開始当初の背景

『集合値計画問題』とは、実社会における多様な価値観を集合値写像によって自然に表現することが可能な問題であり、この問題は 1996 年に研究代表者によって導入されたものである。「数理計画問題」とは、与えられた制約条件の下でより良い目的を達成するための数理モデルであり、理学、経済学、工学の分野にとどまらず、経営、政策なども含む非常に有用性の高い問題である。この問題

を、目的が複数であっても対応できるようにモデル化したのが「多目的計画問題」であり、これまでに四半世紀の研究が行われている。例えば何か欲しいものを購入する場合、出来るだけ良い品を買いたい（目的 1）、出来るだけ安く買いたい（目的 2）という二つの目的を同時に達成させたいと考えるのは自然なことであり、この問題は広い適用範囲を持つ。しかしながら実社会においては多目的計画問題としては表現できない場合もある。例えばチームやクラス、部署や会社等の

グループ同士の比較の際である。優秀なグループを選ぶには、個人の能力のみで比較するのではなく、構成員全体の能力によって判断されるべきである。このような考えに基づいて、集合値写像を用いて多目的計画問題を拡張したものが『集合値計画問題』である。グループ間の比較が可能となり、かつ実社会における多様な価値観を集合値写像によって自然に表現することが可能となるため、複雑かつ多彩な社会現象を紐解くことが可能となる。

この研究はゲーム理論、数理経済学などを始めとする種々の最適化理論の関連分野への新しいアプローチを持つものとして国際的に評価されており、強く発展が望まれている。日本ではこれまで研究代表者によって、ほぼ単独に集合値計画法の研究が進められているが、特に多目的最適化の世界的権威である J. Jahn にも注目され、彼の書籍 (Vector optimization. Theory, applications, and extensions. Springer-Verlag, Berlin, 2004) にも取り上げられており、また E. Hernandez, L. Rodriguez-Marin 等の研究グループでは精力的に集合値計画問題の研究に取り組んでおり、その研究は進みつつあった。

一方で近年、凸最適化問題における制約想定の研究で、飛躍的な進歩があった。制約想定とは一般に、制約条件が良い状態にあることを保証する仮定であり、できるだけ弱い、あるいは使いやすい制約想定の研究が中心であった。しかしながら最近の研究 (例えば C. Li, K. F. Ng and T. K. Pong, Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization, SIAM J. Optim. 19 (2008), pp. 163-187.) では、全ての凸関数に対して最適性条件が成立するような制約想定すなわち、ある意味で最弱の制約想定が示されており、この結果は「できるだけ弱い」制約想定を見つける観点における終着点とみなすことができる。従って、集合値計画法の研究においても最弱の制約想定を見出す必要性は大いに高まっており、集合値計画法の制約想定に関する研究は、理論、応用の両面から発展が強く望まれていた。

## 2. 研究の目的

本研究では、解を求める際に重要となる制約想定について調査し、この結果に基づいた集合値計画法の双対理論、および求解法について研究する。特に、いずれの研究においても重要な完全な形での双対理論の構築を行い、

集合値最適化問題に対する解の必要・十分条件および、KKT型定理を導き、これらの研究を通じてより本質的な集合値計画法の理論の構築を行い、結果として最適化理論全体、ひいては実社会全体への貢献を目指す。

## 3. 研究の方法

- 集合値最適化問題が表現できる埋め込み空間を導入することによって、これまでの研究と同様の考え方が自然に出来るような工夫を行った。この空間は制約想定を導入、良設定問題における集合値準凸関数の定義など、本研究における主たるアイデアとなっている。
- 得られた結果は国内外の研究集会や国際会議で発表し、広く意見を求めることで研究を発展させた。
- 連携研究者との意見交換、国内外の関連する研究者との研究打ち合わせを行い、また得られた結果は、研究集会・国際会議において発表を行い、本研究に対する意見を広く求めることで研究を発展させた。

## 4. 研究成果

主に次の研究成果を得た。

- 凸集合同士の「差」が表現可能となる線形空間を導入し、いくつかの性質について考察した。この埋め込み空間を用い、集合値凸関数で表現される集合値計画問題に対する最弱な制約想定を見出し、最適性の条件に関する理論を導いた。
- 集合値のDC関数を、自然な形で定式化した。また集合値DC関数を用いて表現された集合値計画法について考察した。特に、最適性の条件を得るために必要な制約想定の中で最弱なものを導き、研究を行った。
- 実数値DC計画法、実数値準凸計画法に対する研究をはじめとして、実数値の最適性の条件を得るための制約想定について研究を行った。特に、DC計画問題に対する最弱の制約想定、generatorを用いた準凸関数の劣微分、制約想定、サンドイッチ定理等を導いた。
- 集合値の標準DC計画問題について研究を行った。有効な制約想定を提案し、解の特徴付けを行った。また一般の標準DC計画問題についてもいくつかの結果を得た。特に逆凸制約のDC計画問題に対する制約想定について研究を行い、結果を得た。

- 多目的ロバスト計画問題について研究を行った。その際の解概念が、ある集合値計画法の解に関連していることを示し、有効な制約想定を導入し、解の特徴付けに関する結果を得た。
- 求解法に関連して、良設定の集合値計画問題の研究を行った。特に、集合値写像の準凸性に関して従来の定義の欠点を見出し、埋め込み空間を用いることで自然な準凸性を定義し、解に関する拡張結果を得た。また一般の準凸計画問題に関して制約想定と双対理論について結果を得た。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

- ① S. Suzuki, D. Kuroiwa and G.M. Lee, Surrogate duality for robust optimization, European Journal of Operational Research, 査読有, to appear.
- ② D. Kuroiwa, Set optimization with DC objective function, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 査読有, to appear.
- ③ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Some constraint qualifications for quasiconvex vector-valued systems, J. Global Optim. 査読有, 55 (2013) 539-548.
- ④ Y. Saeki and D. Kuroiwa, Optimality conditions for DC programming problems with reverse convex constraints, Nonlinear Anal., 査読有, 80 (2013) 18-27.
- ⑤ G.M. Lee and D. Kuroiwa, On robust multiobjective optimization, Vietnam J. Math. 査読有, 40 (2012) 305-317.
- ⑥ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming, Nonlinear Analysis, 査読有, 75 (2012) 2851-2858.
- ⑦ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality, J. Optim. Theory Appl., 査読有, 152 (2012) 366-377.
- ⑧ Y. Saeki, S. Suzuki and D. Kuroiwa, A necessary and sufficient constraint qualification for DC programming p

roblems with convex inequality constraints, Sci. Math. Jpn., 査読有, 74 (2011) 49-54.

- ⑨ P. G. Georgiev, T. Tanaka, D. Kuroiwa, and P. M. Pardalos, Nash equilibrium and saddle points for multifunctions, Commun. Math. Anal., 査読有, 10 (2011) 118-127.
- ⑩ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Subdifferential calculus for a quasiconvex function with generator, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 384 (2011) 677-682.
- ⑪ S. Suzuki and D. Kuroiwa, On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming, J. Optim. Theory Appl., 査読有, 149 (2011) 554-563.
- ⑫ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Sandwich theorem for quasiconvex functions and its applications, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 379 (2011) 649-655.
- ⑬ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex Programming, Nonlinear Analysis, 査読有, 74 (2011) 1279-1285.
- ⑭ S. Suzuki and D. Kuroiwa, 準凸関数に対するサンドイッチ定理とその適用例, RIMS Kokyuroku, 査読無, 1755 (2011) 182-187.
- ⑮ S. Suzuki and D. Kuroiwa, 凸不等式制約付き DC 計画問題における最弱の制約想定, RIMS Kokyuroku, 査読無, 1755 (2011) 204-209.
- ⑯ T. Obama and D. Kuroiwa, Common fixed point theorems of Caristi type mappings with wdistance, Sci. Math. Jpn., 査読有, 72 (2010), 41-48.
- ⑰ S. Suzuki and D. Kuroiwa, Observations of closed cone constraint qualification for quasiconvex programming, Nonlinear analysis and convex analysis, 査読有, 2010, 321-326, Yokohama Publ., Yokohama.

[学会発表] (計 10 件)

- ① D. Kuroiwa, Set optimization - an embedding approach, Symposium on Set-valued Optimization, 2013年03月25日, Halle, Germany
- ② D. Kuroiwa, Set Optimization with Set-Valued DC Functions, NAO-Asia 2012, 2012年09月05日, くにびきメッセ

(松江市)

- ③ D. Kuroiwa, On DC set optimization problems, EURO 2012, 2012年07月10日, Vilnius, Lithuania
- ④ 黒岩大史, 非線形最適化と制約想定について, 研究会「最適化の理論と応用」, 2011年12月21日, 新潟大学(新潟)
- ⑤ Daishi Kuroiwa, Set Optimization with DC objective function, International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2011年8月4日, Pukyong National University (韓国・釜山)
- ⑥ Daishi Kuroiwa, The BCQ for nonlinear programming problems, Workshop on analysis and optimization, 2011年3月30日, Chung Li, Taiwan
- ⑦ Daishi Kuroiwa, Set optimization and an embedding approach, International symposium on nonlinear analysis and convex analysis, 2011年3月28日, Hualien, Taiwan
- ⑧ Daishi Kuroiwa, Set optimization and Lagrange duality, ICOTA 8, 2010年12月11日, Shanghai, China
- ⑨ Daishi Kuroiwa, Set optimization and duality results, NAO-Asia2010, 2010年9月10日, Phuket, Thailand
- ⑩ D. Kuroiwa, On constraint qualification for set programming problems, 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 2010年8月31日, 京都大学数理解析研究所(京都)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

黒岩 大史 (KUROIWA DAISHI)  
島根大学・総合理工学研究科・准教授  
研究者番号: 40284020

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

田中 環 (TANAKA TAMAKI)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 10207110

山内 貴光 (YAMAUCHI TAKAMITSU)  
島根大学・総合理工学研究科・講師  
研究者番号: 00403444

松下 慎也 (MATSUSHITA SHIN-YA)  
秋田県立大学・システム科学技術学部・助教  
研究者番号: 20435449