様式Ｃ－１９

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　6 月 26 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２０１０　～　２０１２
課題番号：２２５４０１３６
研究課題名（和文）　散逸系におけるディフェクト進行波解の数理的研究

研究課題名（英文）　Mathematical study to Defect travelling wave in dicipative system

研究代表者
大西　勇　（Ohnishi Isamu）
広島大学・ 大学院理学研究科・ 准教授
研究者番号：３０２６２３７２

研究成果の概要（和文）：所望のパターン形成に関わる分岐解析、中心多様体縮約の利用による証明。分岐方程式を丁寧に考察し、2 次分岐までも、厳密に証明することに成功。進行波のもととなるパターンの厳密解析。進行波については、ゾル＝ゲル転移系について、実験とシミュレーションをもとに、理論的な考察を行った。

研究成果の概要（英文）：Bifurcation analysis to Lugiato-Lefever equation to get desired pattern with use of reduction to center manifold theory. Fine analysis to bifurcation equation leads us to rigorous proof to existence of the secondary bifurcation. Mathematically rigorous analysis to pattern which causes the desired travelling wave. Experiment and numerical simulation to travelling wave in Sol=Gel system and theoretical analysis to it.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：非線形問題の解析
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論、統計数学）
キーワード：散逸系、非可積分系、進行波解、パターン形成

１．研究開始当初の背景

散逸系においては、相対的な意味において、無秩序状態を含む他の大多数の状態より非常に安定的な低エネルギー状態で、かつ、ほぼエネルギー的に等価ではあるが、微妙に違っているというような秩序状態が複数（無限個であり得る）存在していることがある。このような場合、無秩序状態に多少のホワイトノイズを加えた初期値から時間発展させた解は、空間局所的にはそのどれかの秩序状態のひとつに、急速に引き込まれた後、空間局所的にランダムに生成された秩序状態間に創られる“ディフェクト（欠陥）”部分（合金相転移問題などで見られるいわゆるグレインバウンダリーのようなもの）がせめぎ合いつつ、微妙ではあるが、よりエネルギーの低いほうに向かって時間発展し、かつ、そのようなディフェクト部分を解消するように運動していく現象が、往々にして、見られる。私は、このディフェクトの解消運動を、ある

種の進行波解と見做して、その存在や一意性、さらにはよりアドバンストな数理的性質を数学的に研究したい。

２．研究の目的

①　　　前世紀の後半から、単独の反応拡散方程式：

，有界領域上、かつ、 は、フィッシャー型、もしくは双安定型などで、適切な条件を満たしている、かつ、Ｄは拡散係数で正の定数、

に対しては、進行波解の存在と一意性、及びそれらの様々な性質が研究されてきている（[FM], [VVV], [C]）。主な結果は空間１次元的なものであり、一旦は生成された内部遷移層の運動を、進行波として捉える手法が奏功して、大変、詳しい性質まで調べられている。また、空間１次元のディフェクト進行波的な解としては、ウエーブトレインの存在と安定性を、リバーシブル系のホモクリニック分岐の理論を用いて研究するという流れがあり、これについては、専門家による良いまとめが出ている（[DSSS]）。これも、本質的に空間次元が１である必要がある。一方、空間次元を２以上にした場合の著しい結果としては[MNL]があり、これ以後も空間非一様なメディア上の進行波解について、メディアの非一様性について様々な「構造」を導入した上で、精力的な研究が続けられている。また、単独でなく、競争系などの、複数の反応拡散方程式のシステムについては、[K]に良い解説があり、個々の方程式が記述する現象に応じた興味深い性質が導かれている。私は、高分子系のマクロ、及び、ミクロ相転移などを題材としたモデル方程式について、その分岐構造やドメインサイズの特徴づけなどを行ってきた（[OIN], [ONIM], [O1]）。しかしながら、エネルギー最小解を特徴付けるだけでは、元の現象を数理的に理解したとはほとんど言えない。少なくとも準安定状態に達してからの、コアースニング過程やグレインバウンダリーの消滅過程などの遷移過程を理解するには、急速な引き込み後におけるゆっくりとした運動を何らかの形で数理の土俵に持ち込み研究する必要がある。一方で、私は、そのような問題意識と絡めて、拡散波が主導的な役割を務めるパターン形成の問題を、反応拡散沈殿系として定式化される Liesegang 現象のパターン形成の問題を研究する中で培ってきた([OM], [HHMO],[O2])。これら経験を元に、空間次元２以上の超直方体領域における、ディフェクトの進行波解についての研究に入りたい。これは、超直方体の軸方向の無限遠方では、左右で異なる安定、もしくは、準安定状態を取るような境界条件を課した上で、内部ではどこかでそれらの２状態が「ぶつかり」合い、「妥協」するような狭い「ディフェクト」部分を人工的に作った初期値を持つような進行波の事で、このような進行波がある場合にはある程度安定に存在できることを、シミュレーションでは確かめてある。

②　　　まずは、空間次元２の場合について、単独の方程式から研究を始めたい。単独では安定状態がの範囲にあると思われる。そのような条件をうまく課して、問題を非線形放物型偏微分方程式の解の定性理論の応用研究と見做すことができると考えられる。単独方程式では、解について強い意味での比較定理があるので、定式化に成功すれば、ある程度の結果を出せるだろうと思う。その後、FitzHugh-Nagumo タイプの方程式系に研究を進めたい。この場合、アクティベータの拡散係数が十分小さければ、空間１次元問題においては、非常に多数の安定定常解が存在する（[OIN], [ONIM], [O2]）。それらを遠方での境界条件として採用して、進行波解を構成する手法、及び、その数理的な性質を研究していきたい。また、これらのアイデアを実際に実現していく過程で、様々なパラメータ領域においてどのようなことが現実に起こるか、を可視化してみることが非常に有効であると考えられる。そのため、中規模程度の数値計算用の計算機クラスタを構成できる計算機を購入し、数値実験、シミュレーションも精力的に行いたい。

③本研究は、空間２次元以上で本質的に見られる「ディフェクト」の運動を数学の土俵に乗せて研究するという意味がある。[MNL]で扱われているタイプのものとも本質的に異なるし、単純な比較定理の適用を、特に、複数の方程式が結合するシステムにおいては、使用できないという困難がある点が、学術的にも新しい。また、ウエーブトレインの研究で活躍した、リバーシブル系におけるホモクリニック分岐の理論もまったく、適用できない。システムにおいては、インヒビターの拡散が非常に速いときは方程式の構造が多少、簡単になるし、また、インヒビターの時定数が０となる極限においては、変分構造が存在する。その場合に限って何か意味のある存在の結果や解の特徴づけを数学的にきちんとやるだけでも、非線形問題の数学解析としては新境地を開く仕事となるであろうと思われる。

References:

[FM1] P. C. Fife and J. B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, Arch. Ration. Mech. Anal. 65 (1977), 335–361.

[FM2] P. C. Fife and J. B. McLeod, A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion,

Arch. Ration. Mech. Anal. 75 (1980/81), 281–384.
[VVV] A. I. Volpert, V. A. Volpert, V. A. Volpert, Traveling wave solutions of parabolic systems, American Mathematical Society Providence, RI, 1994.
[C] X. Chen, Generation, propagation, and annihilation of metastable pattern, J. Differential Equations 206 (2004), 399–437.
[DSSS] A Doelman, B Sandstede, A Scheel and G Schneider. The dynamics of modulated wave trains.
Memoirs of the American Mathematical Society 199(934) (2009)
[MNL] H. Matano, K.I. Nakamura and B. Lou, Periodic traveling waves in a twodimensional cylinder with saw-toothed boundary and their homogenization limit, Networks and Heterogeneous Media 1 (2006), 537–568.
[K] 観音幸夫,「２種競合系の進行波について」, 数学, 第 49 巻, 第 4 号, 1997 年, 379 –392.
[OIN] I. Ohnishi, M. Imai, Y. Nishiura, "On the most stable steady states of activator-inhibitor system in view of minimizing an free energy", Research Report in RIMS of Kyoto University 1216, 45--50, (2001)
[ONIM] I. Ohnishi, Y. Nishiura, M. Imai, Y. Matsushita, "Analytical solutions describing the phase separation driven by a free energy functional containing a long-range interaction term". Chaos 9, no. 2, 329--341, (1999)
[O1] I. Ohnishi, "Wavelength of global minimizer of variational problem with non-local effect". Proceedings of the International Conference on Asymptotics in Nonlinear Diffusive Systems (Sendai, 1997), 247--251, Tohoku Math. Publ., 8, Tohoku Univ., Sendai, (1998).
[NI] Y. Nishiura, I. Ohnishi, "Some mathematical aspects of the micro-phase separation in diblock copolymers". Phys. D 84, no. 1-2, 31--39, (1995)
[OM] I. Ohnishi and M. Mimura, "A Mathematical Aspects for Liesegang Phenomena", Proceeding of Equadiff 11, 343--352, (2007)
[HHMO]D. Hilhorst, R. van der Hout, M. Mimura and I. Ohnishi, "A mathematical study of the one dimensional Keller and Rubinow model for Liesegang bands", Journal of Statistical Physics, 135 (2009) 107 -- 132.
[O2] I. Ohnishi, "A mathematical aspect for Liesegang phenomena in two space dimensions", Research Report in RIMS of Kyoto University 1499, 185--201, (2006)

３．研究の方法

本研究では、最終的にはきちんと証明された数学的結果を出すことを一番の目標にするが、しかしながら、その研究過程においては、適切なパラメータ領域、方程式の形、境界条件の設定などを探る必要があるため、コンピュータによる数値実験、シミュレーションを併用し、成り立ちそうな結果を探るばかりでなく、そもそもの問題の定式化にも役立てていきたい。進行波解についての基本文献の復習から始めて、その数学的テクニックの成り立つ本質を理解した上で、本研究の問題点をより慎重に、かつ、精密に突き止めていく。その上で、コンピュータシミュレーションも行い、適切な数学的事実を追い詰めていきたいと考えている。ある程度、焦点をしぼったあとは、比較定理、変分構造に基づく様々な関数解析的手法、エネルギー不等式の活用などを通じて、基本的な結果を導出し、証明を与え、この分野の数学的基礎の一部を築きたい。

２０１０年度

まず、数値シミュレーション環境を整えた。Core i7 960 (quad core, 3.20 GHz, L3 キャッシュ 8MB), DDR3 12GB メインメモリー(トリプルチャネル, PC3-8500), チップセットとして､インテル純正の X58 Express, HDD 2TB 程度のスペックのＰＣクラスタを、初年度としては、４台程度（総額１２０万円程度と思われる）を購入し、２次元のディフェクト進行波解の探索に用いた。空間１次元では、進行波解の速度は、遠方の境界条件に依存し、そのエネルギー差に比例することが厳密に証明されている。今回の研究では、そのアナロジーをシミュレーションで探ることから始めたい。特に空間１次元の安定定常解の空間構造が非常に限られている単独方程式では、返って、計算時間を食うかもしれないので、中規模の計算能力を持ったＰＣクラスタの構築が欠かせないと考える。その後、単独方程式については、比較定理が使えることや変分構造のあること、及び、これまで培われた関数解析的な技術や解の評価技法が確立しているので、それらの応用でどこまで証明できるか考えた。まずは、基本的な結果として、このような進行波解の存在と一意性の議論を行った。その後、進行波解の安定性解析を行いたい。できた結果は海外の国際研究集会などで発表した。

２０１１年度

前年度の単独方程式の研究成果（シミュレーション、厳密数学解析の両方）を踏まえ、合金相転移と関係の深い Cahn-Hilliard 方程式（４階の非線形放物型方程式）、Fitzhugh-Nagumo 方程式系（２階の非線形放物型方程式系）、高分子系のミクロ相転移を記述する太田-川崎理論に基づく西浦方程式などに取り組んだ。今度は、どの方程式においても、比較定理、強最大値原理などが成り立たないため、このような進行波解の存在を言うための標準理論である劣解-優解法が使えない。したがって、一般理論の単なる系ではなく、個別の方程式の特徴に基づいた数学的な議論を工夫する必要があった。また、シミュレーションについても、４階の放物型作用素を含むものは、数値的な不安定性が出やすいため、数値シミュレーションによる研究を行うときにも、単純な差分法に変わる工夫をしたほうが良いことが知られている。今のところ、ＦＦＴを駆使した擬スペクトル法をその解法の一部に用いる手法が効率が良いといわれているので、非線形シュレーディンガー方程式のシミュレーションをやったときの手法を改変して、今回の問題に応用した。

基本的な結果に一応のめどがつき、その後、数学理論のほうにも一定レベルの決着がついたので、現在はさらに、シミュレーション主導で、いくつかの角度から数理的な研究を行っている。

２０１２年度

１．　エネルギー散逸、流入、及び、detune 項を持つ非線形シュレーディンガー方程式の dissipative cavity soliton 解やより複雑なパターン形成の問題との比較研究。

今回の提案の研究とは独立に、内のＤ３学生の宮路智行くんを主に、京大（理）の堤誉志雄先生、非線形光学に現れる空洞共振器内のレーザー共振によるスポットパターンの形成（dissipative cavity soliton）とその安定性、及び、ダイナミクスなどの研究を行っている。このパターンも、Kerr cavity media 内の興奮性に起因する一種のチューリングパターンで、縞々パターンなども空間２次元では見つかっているし、個々で扱うような進行波解に近いものも状況によっては現れ得るかもしれない。我々は、これらの経験も踏まえつつ、反応拡散系とシュレーディンガー方程式系に現れる、見た目は類似のパターン形成の問題に対し、その共通点、相違点を現象の側と理論の側から分類し、その基礎理論を構築しつつ、内在するナイーブなメカニズムの違いが、現実の大域的なダイナミクスの違いに、どのように効いてくるか、といった問題意識で取り組んだ。

２．　ノイズに誘導されるパターン形成の問題の解析

反応拡散系にしても、非線形光学に現れるシュレーディンガー系にしても、現実の実験系から１００％ノイズを取り去ることは不可能である。より実験に近い立場からの応用研究を目指す場合、一般的に何らかの形でノイズの効果を見る必要がある。反応の場であるインヒビターの場が、揺らぐ効果や実験室や実験設備の環境由来のノイズ、また、アクティベーター拡散の不均一など、ノイズの原因も少し、考えただけでも多数存在する。

まず、数学理論としては、反応の場に一様にランダムに存在すると仮定した加法的なホワイトノイズの影響をみる。きちんと確率微分方程式として定式化すれば、ノイズが小さいときの影響は、いわゆる大偏差原理をきちんと証明するところから始まる。これは何らかの形では証明可能と思われる。その後、ノイズの影響を大きくしていったときに、どのような影響がパターンに出るか研究した。

４．研究成果

いくつかの散逸系の方程式、および、非積分系における、類似の特徴のある方程式に対して、分岐解析を行い、2 次分岐を含む現象と対応のつく数学的な結果を得た。これは、本研究における、非常に面白い結果であると思う。一方で、散逸系においては、所望の進行波解について、ありえる性質を調べる意味から、シミュレーションも積極的に行った。結果、カーン＝ヒリアード型について、従来とは異なる原理でパターンの形成が起こるような本質的なゾル=ゲル転移系について、まずは、シミュレーションの結果を得た。それに対して、理論物理的、数理物理的な考察を加えて、まとめつつある仕事が一つある。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

1. T.Miyaji,I.Ohnishi,Y.Tsutsumi, Stability of Stationary Solution for the Lugiato-Lefever Equation, Tohoku Math. Journal(査読有) 63 (No.4) 2011 651 - 663

2. T.Miyaji, I. Ohnishi, R. Kobayasi A. Takamatsu Mathematical analysis to

coupled oscillators system with conservation law, RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有 B21 2010 129 - 147

3. T.Miyaji, I.Ohnishi, Y.Tsutsumi, Bifurcation analysis to the Lugiato-Lefever equation in one space dimension, Physica D (査読有) ２３９ 2010 2066 - 2083

〔学会発表〕（計６件）

1. I.Ohnishi Bifurcation analysis to Lugiato-Lefever equation, JISD2012 2012/5/30 (Universitat Politecnica de Catalunya) Barcelona, (Spain)

2. I.Ohnishi Bifurcation analysis to Lugiato-Lefever equation, 九州大学物理学教室談話会 2011/12/15 九州大学 箱崎キャンパス

3. I.Ohnishi, Bifurcation analysis to Lugiato-Lefever equation, SIADS (SIAM conference) 2011/5/25 Snowbird, Utah, USA

4. I.Ohnishi, Pattern formation analysis to Cahn-Hilliard type equation related to Sol-Gel phase separation, 2010/12/15 岩手大学

5. I.Ohnishi, A Mathematical analysis to Liesegang ring as a radially symmetric solution in n-space dimension, the 6th EASIUM and AMIC 2010 2010/6/23 クアラルンプール マレーシア

〔図書〕（計１件）

1. Linda J.S. Allen（の翻訳書の一部担当） 共立出版 生物数学入門 2011 総ページ 440(のうち，４０ページ分)

６．研究組織

(1)研究代表者

大西　勇（Ohnishi Isamu）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：３０２６２３７２

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：