

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 21 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540147

研究課題名(和文) 確率ランキングモデルとその応用

研究課題名(英文) Stochastic ranking processes and their applications

研究代表者

服部 久美子 (HATTORI, KUMIKO)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：80231520

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：確率ランキング過程は一列に並んだ粒子が独立にそれぞれ固有のジャンプ率にしたがって列の先頭にジャンプするモデルである。初期のモデルを一般化して、ジャンプ率が時間依存性をもつモデルを構成した。フラクタル上のループ・イレーズド・ランダム・ウォークの厳密な解析を可能とするモデルを構成した。連続極限の存在、極限の確率過程が真に1より大きいハウスドルフ次元をもち、かつ自己回避的であることを示した。ここで用いた構成法は新しいものであり、これまで知られていなかった新しい自己回避ウォークの族の構成も可能にする。

研究成果の概要(英文)：We constructed a stochastic ranking process with jump times determined by Poisson random measures and studied its infinite particle limit. The limit distribution of the scaled position and the intensity converges almost surely and the distribution function is related to a system of non-linear partial differential equations. This process has application to the sales ranks of an online bookstore, where the sales rate of each book varies with time. /We found a new method to construct a loop-erased random walk on the finite pre-Sierpinski gasket. We proved the existence of the scaling limit and obtained some sample path properties of the limit process. This method is applicable to various sorts of random walks and allows us to obtain a new family of self-avoiding walks.

研究分野：数物系科学

キーワード：確率過程 極限定理 非マルコフ過程 ループ・イレーズド・ランダム・ウォーク 連続極限 確率ランキングモデル ロングテール

1. 研究開始当初の背景

オンライン書店 Amazon がウェブで公開している専門書(なかなか売れない本)の売り上げ順位を長期にわたって追跡・記録すると、奇妙な振舞いが見える。ほとんどの期間、数十万位付近で時間とともにゆっくり順位が下がるが、まれに一瞬で一万位ほどに跳ね上がり、その後また単調に下がる。このことから、順位付けは売り上げの単純な平均の順ではないことがわかる。特に、実際に注文することによって、順位的大幅な跳びは本の注文に対応することがわかる。この順位付けを単純化した確率ランキングモデルを提唱した。これは一列に並んだ粒子がそれぞれ独立に、固有のジャンプ率で、ランダムな時刻に列の先頭にジャンプする確率的モデルである。このとき空席は他の粒子がずれることによって埋まる。この数理モデルで、粒子数で割って規格化した順位とジャンプ率の結合分布について、無限粒子極限が確率 1 で存在し、極限分布は決定論的なこと、および極限分布の分布関数は、蒸発項を持つ Burgers 型非線形偏微分方程式の解となることを示した。また、初期時刻以降に一度以上先頭にジャンプした粒子の割合は確率過程であるが、無限粒子極限でランダムでない関数に確率 1 で収束する。この関数は、ある非線形偏微分方程式の特性曲線として数学的に特徴付けられ、時刻 0 で先頭にいる粒子が他の粒子の先頭へのジャンプによって下方へ押し流される振舞いと解釈できる。この解釈からオンライン書店の本の売り上げ順位への応用が可能になる。特性曲線に対応する順位の変化には、無数にある他の本の売り上げが反映されるので、Amazon における書籍の売り上げの分布、特にロング・テール構造の解析が可能になる。実際に、手動でデータを取ってこのモデルを適用することにより、Amazon はロング・テールビジネスの典型例とみなされていたにもかかわらず、その売り上げにはロング・テール部分(莫大にある売れない本)よりも少数のベストセラーが大きく貢献していることが分かった。

2. 研究の目的

最初に構成した確率ランキングモデルは、Amazon の順位の時間変化の振舞いの定性的な性質を再現する最も単純なモデルである。単純であるにもかかわらず、現実の順位の時間変化の数学的説明としては良い結果が得られた。例えば、このモデルを現実のデータに当てはめて得られた Amazon の売り上げがロング・テール型でなくベストセラー依存型であるという結果は、得られた当時は意外なものであった(現在の Amazon は明らかにベストセラー依存型である)。他方で、実際の順位の変化はこのモデルでは説明できない、さまざまな細かい(しかし無視できない)

振舞いも示す。現実の順位の変化から経済学的・社会的分析を行う上でも、数学的見地からも、解決したい課題がある。ジャンプ率が時間とともに変化すること(応用上では、例えば、夜は活動が減る)、ジャンプ率が粒子の位置に依存すること(先頭付近の順位にいる本は買われやすくなる)、ジャンプが独立でないことなどの影響を取り入れた、理論的にも深く、応用も広いモデルを構成することを目的としてこの研究を始めた。

3. 研究の方法

(1) 確率ランキングモデルに関しては、数学研究と応用研究を互いに関係付けながら並行して研究を進めた。以前は手動で行っていたが、計算機プログラムによるインターネットデータの自動採取を行い、それをもとに、より現実を反映させる確率モデルを構成した。

(2) フラクタル上の非マルコフ過程に関しては長年の研究の蓄積があった。具体的には、フラクタル上である問題があるとき、まず、自己相似性を利用できる(有限個で閉じた recursion の式が得られる)モデルを構成する。次に、得られた recursion を解析する。さらにそこからもとの問題に対する解答を与える。それぞれの段階で扱っている対象に固有の難しさはあるが、自己回避過程、自己反発過程などに関して厳密な結果を得てきた。こうした経験を生かして、ループ・イレズド・ランダム・ウォークの新しいモデルを構成した。

4. 研究成果

(1) 初期の確率ランキングモデルは、一列に並んだ粒子が独立に、それぞれ固有のジャンプ率に従って列の先頭にジャンプするものであったが、それを一般化して各粒子のジャンプ分布がポアソン点過程で決まるモデルを構成した。大数の法則の描像の通り、無限粒子極限において、粒子数で割って規格化した順位とポアソン点過程の intensity measure の結合分布の収束に関する結果を得た。このモデルは粒子のジャンプ率が時間的に変化する場合も含んでいる。その応用として、計算機プログラムを用いて Amazon およびネット掲示板のトピックの順位データを自動採取し解析した。いずれもロング・テール型ではないことは以前の結果と変わらないが、時間依存性に関しては、ネット活動として予想されていた昼夜逆転は起こっておらず、昼間特に夕刻から就寝までの時間に活発であるという結果を得た。

(2) 非マルコフ性のため今まで解析困難とみなされてきたフラクタル上のループ・イレズド・ランダム・ウォークに関して、厳密な

解析が可能となる、既存とは異なる構成法によるモデルを開発した。ループを出来た順に消していくのではなく、スケールの大きい順に消すのである。この消し方によると、フラクタルの自己相似性を利用して、uniform spanning tree を用いずに直接、有限個の式で閉じる recursion が得られて解析できる。シェルピンスキー・ガスケットと呼ばれるフラクタル上で、この方法でループ・イレースド・ランダム・ウォークを構成し、連続極限（格子間隔を 0 に近づけた極限）が存在することを示した。さらに、連続極限の確率過程は、確率 1 で、見本路のハウスドルフ次元が真に 1 より大でありながら、自己回避性を持つことも証明した。このことは、見本路が無限に細かいギザギザをもちながらも、自分と交差、接触しないことを意味する。以前構成して解析したフラクタル上の自己回避ウォークの連続極限もこのような性質をもつが、ここで構成したモデルとは、ハウスドルフ次元などの指数の値が異なるので、モデルとして本質的に別のものである。

(3) G. Lawler が最初に提唱した、ループ・イレースド・ランダム・ウォークは、単純ランダムウォークから出来た順にループを消して得られるウォークである。シェルピンスキー・ガスケット上で、独自に構成した(2)のループ・イレースド・ランダム・ウォークが、Lawler の「標準モデル」と同値であることを証明した。一般には、ループを消す順番が異なると、できたウォークの分布は異なることが知られており、この同値性は興味深い結果である。(2)のモデルは単に解析可能なモデルを構成したのみならず、ループ・イレースド・ランダム・ウォークの新しい解析法を見出したことになる。Uniform spanning tree を用いる方法は、単純ランダム・ウォークからループを消すには強力な方法であるが、大きい順にループを消す構成法は、非マルコフ的なランダム・ウォークにも適用可能である。

(4) 「標準的」ループ・イレースド・ランダム・ウォークと、ここで構成した大きい順にループを消して得られるウォークは、シェルピンスキー・ガスケット上では同値であることが証明できたが、どのようなフラクタルで同値であるかは未解決である。手始めとして、2,3 次元の枝分かれコッホ曲線など、2 通りの構成によるモデルが同値になる他の例を見出した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

K.Hattori, M.Mizuno

Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket,
Stochastic processes and their applications, 査読有 124 (2014) 566-585
DOI:10.1016/j.spa.2013.08.006

T.Hattori, S.Kusuoka
Stochastic ranking process with space-time dependent intensities,
ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 査読有 9 (2012) 571-607

Y. Hariya, K.Hattori, T.Hattori,
Y.Nagahata,Y.Takeshima, T.Kobayashi
Stochastic ranking process with time dependent intensities,
Tohoku Math. Journal 査読有 63 (2011) 77-111

T.Hattori
Stochastic ranking process and web ranking numbers,
In Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory, Eds. T.Hara, T.Matsui, F.Hiroshima, Math-for-Industry Lecture Note Series, 査読無 30 (2011) 178-191
http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inners/id:2

K.Hattori, T.Hattori
Sales ranks, Burgers-like equations and least-recently-used caching,
RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有 B21 (2010) 149-161

[学会発表](計 10 件)

K. Hattori
Non-Markov processes on fractals,
Bremen Winter School and Symposium:
Diffusion on Fractals and Non-linear Dynamical Systems,
2015.3.26
University of Bremen, ブレーメン(ドイツ)

K. Hattori
Loop-erased random walk on a fractal -- a random fractal approach,
Fractal Seminar, 2014.4.1
Friedrich-Schiller University Jena, イエナ(ドイツ)

K. Hattori
The scaling limit of loop-erased random walk on fractals -- the erasing-larger-loops-first model and the uniform spanning trees
Fractal Geometry and Stochastics V,
2014.3.24

タバルツ (ドイツ)

服部久美子

Non-Markov processes on fractals,
RIMS 研究集会「確率解析」, 2014.3.19
京都大学数理解析研究所 (京都府京都市北白川)

K. Hattori

The scaling limit of a loop-erased random walk on the pre-Sierpinski gasket -- the larger-loop-first model and the uniform spanning trees,
Markov Chains on Graphs and Related Topics, 2013.2.15
京都大学数理解析研究所 (京都府京都市北白川)

服部哲弥

流行度の順位付け
OR 学会待ち行列研究部会例会
2012.11.17
東京工業大学 (東京都目黒区)

K. Hattori

The scaling limit of a loop-erased random walk on the Sierpinski gasket,
XVIIth International Congress on Mathematical Physics,
2012.8.10
First Hotel EUROPA, オールボー (デンマーク)

K. Hattori

The scaling limit of a loop-erased random walk on the pre-Sierpinski gasket,
8th World Congress in Probability and Statistics
2012.7.10
Grand Cevahir Hotel Convention Centre
イスタンブール (トルコ)

服部哲弥

Stochastic ranking process with time dependent intensities,
2010 年度日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会一般講演
2010.9.22
名古屋大学 (愛知県名古屋市千種区)

服部久美子

フラクタル上の数理
2010 年度日本数学会秋季総合分科会応用数学特別セッション
2010.9.24
名古屋大学 (愛知県名古屋市千種区)

{その他}

ホームページ等

Bremen Winter School and Symposium 講演
http://www.wis-dfnd.math.uni-bremen.de/slides/Hattori_Bremen_2015.pdf

イエナ大学フラクタル・セミナー講演
<http://www.comp.tmu.ac.jp/kumiko/slide/ena.pdf>

日本数学会応用数学特別セッション講演
<http://www.comp.tmu.ac.jp/kumiko/suuri.pdf>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

服部 久美子 (HATTORI, Kumiko)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号: 80231529

(2) 連携研究者

服部 哲弥 (HATTORI, Tetsuya)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 10180902