

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 17 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540154

研究課題名（和文） 実数の特異部分集合に関する Scheepers 予想の上半連続関数列の観点からの研究

研究課題名（英文） A study on Scheepers' conjecture of special subsets of reals in view of a sequence of upper semi-continuous functions

研究代表者 酒井 政美（SAKAI MASAMI） 神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：60215598

研究成果の概要（和文）：実数の特異部分集合と各点収束位相をもつ関数空間における連続関数の準正規収束との関係に関する Scheepers 予想を上半連続関数列の観点から解決を試みた。成果としては、Scheepers 予想の反例を構成するには Pixley-Roy 超空間において開被覆に関する性質や、局所的性質を調べるのが有効ではないかとの手がかりを得て、Pixley-Roy 超空間における the Frechet-Urysohn property などの局所的性質の特徴づけや、the discrete countable chain condition などの特徴づけを与えた。また、Scheepers 予想とも関連のある selective separability について、いくつかの未解決問題に解を与えた。

研究成果の概要（英文）：Concerning Scheepers' conjecture on special subsets of the real line and pseudo-normal convergence of continuous functions in a function space $C_p(X)$ with the topology of pointwise convergence, we tried to answer the conjecture in view of a sequence of upper semi-continuous functions. We found that a Pixley-Roy hyperspace is useful to consider Scheepers' conjecture. We obtained a characterization for a Pixley-Roy hyperspace is Frechet-Urysohn or has the discrete countable chain condition. Moreover, concerning selective separability which is connected with Scheepers' conjecture, we gave answers to some open problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1700,000	510,000	2210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論

1. 研究開始当初の背景

M. Scheepers (Boise Univ. USA) は、実数の古典的な特異部分集合(Sierpinski set など)に関する研究の過程で、実数の部分集合 X が開被覆(open covering)に関する性質 $S_1(\Gamma, \Gamma)$ (i.e., ガンマ被覆の列が与えられた時、

各列からひとつづつ元を選びガンマ被覆にできる)を満たせば、 X は X 上の準正規収束関数列に関する性質 wQN を満たすことを示し、 X の開被覆に関する性質と X 上の各点収束位相を入れた関数空間の局所的性質の間の意外な関係を与えた。しかし、この逆が成

立するかは未解決のまま残り、現在 Scheepers 予想とよばれている。この予想に対しては集合論や位相空間論の立場などから解決のための色々な試みがなされているが、今現在も解決に至っていない。研究開始当初においては、主に次の事柄が知られていた。

(1) Scheepers 予想は、Laver の集合論のモデルの中では正しい(2008年)。これは、A. Dow, L. Bukovsky および研究代表者のそれぞれの結果を組み合わせることにより導かれる。よって、Scheepers 予想の反例を構成しようとする場合、ある特殊な公理の仮定が必要になる。通常の集合論の公理系 ZFC のなかで Scheepers 予想が正しい可能性は残っている。

(2) 位相空間 X が wQN を満たすための必要十分条件を X の開被覆に関する性質で与えることができる(2007年)。この特徴付けは、研究代表者により与えられた。

(3) 位相空間 X が性質 $S_1(\Gamma, \Gamma)$ を満たすための必要十分条件を X 上の上半連続関数列の準正規収束に関する性質(wQN^*)で与えることができる(2009年)。この特徴付けは、L. Bukovsky の結果、および研究代表者が Bukovsky の問題を解決することにより与えられた。

2. 研究の目的

前述の背景を踏まえて、Scheepers 予想を肯定的、または否定的に解決する(反例を構成する)ことが研究の目的である。さらに Scheepers 予想の解決に至る過程で関連があり、重要でもある以下の周辺問題も研究の目的である。

(1) 実数の部分集合が wQN を満たせば 研究代表者と連携研究者によって導入された (USC)s を満たすか? (この問題が正しいければ Scheepers 予想も正しい)

(2) 実数の部分集合が $S_1(\Gamma, \Gamma)$ を満たせば σ -集合か? また、(USC)s は他の実数の特異部分集合とどのような関係にあるのか?

(3) Scheepers 予想を開被覆の観点からみたとき、開集合と開閉集合との差を埋める必要があるが、開被覆の観点からみたときは、Scheepers 予想にどのようなアプローチが可能か?

3. 研究の方法

Scheepers 予想を“準正規収束する上半連

続関数列の問題”と捉えなおして解決することを試みる。そのために、大田氏(連携研究者、静岡大)と既に始めている上半連続関数列と連続関数列を結びつける性質(USC)sの研究を継続し、研究の目的で述べられた周辺問題(1),(2),(3)も含めて研究する。周辺問題(3)は、位相空間の開被覆に詳しい矢島氏(連携研究者)の担当である。この計画を進めるには、集合論のアイデアや手法が必要となり、関係する国内外の研究者との継続的な意見交換が欠かせない。このため、研究会への出席、研究打ち合わせ、そして専門知識の提供などを通して研究を行っていく。国内では、記述集合論や強制法(forcing)の手法に詳しい嘉田氏(大阪府立大)、また国外では、この予想を研究している M. Scheepers(USA), B. Tsaban(Israel), L. Bukovsky(Slovakia)の諸氏と国際会議等で意見交換をする。嘉田氏の専門知識の提供により、強制法や elementary submodel を利用して反例を構成する方向での研究も計画の1部である。

4. 研究成果

Pixley-Roy hyperspace を利用して Scheepers 予想の反例が構成できるのではないかとの着想のもと、以下の研究成果をして得た。また、selection principles の一つである selective separability について未解決問題を解決するなどの成果を得た。

(1) Pixley-Roy hyperspace の開被覆についての研究は多くあるが、局所的性質についての研究はほとんどないといってよい。Scheepers 予想における性質 wQN は局所的性質であるため、この観点から Pixley-Roy hyperspace の局所的性質を研究し、Pixley-Roy hyperspace においては k -空間、sequentiality, Frechet-Urysohn property, Frechet-Urysohn for finite sets などの局所的性質がすべて同値であるという意外な結果を得た。証明においては、Arens が構成した sequential であるが Frechet-Urysohn でない空間を Pixley-Roy 超空間に埋め込んで利用するという手法を利用した。またその応用として Pixley-Roy hyperspace の新しい距離化定理を与えることができた。

(2) Scheepers 予想に現れる開被覆に関する性質 $S_1(\Gamma, \Gamma)$ と関連する selective separability について、Pixley-Roy hyperspace が selective separability を満たすための必要十分条件を X の局所的な位相的性質である fan-tightness を利用して特徴づけた。特に、selective separability が積で

保存されるかという未解決問題に対して、連続体仮説のもとで Menger の開被覆に関する性質と Pixley-Roy hyperspace を利用して可算濃度の反例を与えた。selective separability と密接な関係にある R-separability についても Pixley-Roy hyperspace が R-separability をもつための必要十分条件を与えた。ただし、selective separability が積で保存されるかという問題は、ZFC のなかでは未解決のままである。

(3) Scheepers 予想に現れる開被覆に関する性質 $S_1(\Gamma, \Gamma)$ と関連する the discrete countable chain condition や weakly Lindelof などの位相的性質を Pixley-Roy hyperspace がもつための必要十分条件を X の位相的性質で与えた。また、Pixley-Roy hyperspace の tightness の特徴付けも与えて Pixley-Roy hyperspace の tightness がどのような位相的性質で特徴づけられるかという未解決問題を解決した。この特徴づけには、van Mill の supertightness の概念が有効に使われる。

(4) 位相空間において k-network の概念と weak base の概念は多くの場合に一致することが知られている。weakly first-countable な位相空間において weak base は常に k-network かという Liu の問題を連続体仮説の下で Yakovlev の構成した空間を利用して否定的に解決した。同時に、point-countable k-network と一般距離空間に関するいくつかの未解決問題に対して、反例を構成して否定的に解決した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① M. Sakai, Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces, *Topology Appl.*, 査読有, 159(2012), 3080—3088.
DOI:10.1016/j.topol.2012.05.020
- ② M. Sakai, Selective separability of Pixley-Roy hyperspaces, *Topology Appl.*, 査読有, 159(2012), 1591—1598.
DOI:10.1016/j.topol.2011.03.017
- ③ M. Sakai, The Frechet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces, *Topology Appl.*, 査読有, 159(2012), 308—314.
DOI:10.1016/j.topol.2011.08.027
- ④ M. Sakai, G. Gruenhage, Selective separability and its variations,

Topology Appl., 査読有, 158(2011), 1352—1359.

DOI:10.1016/j.topol.2011.05.009

- ⑤ M. Sakai, On k-networks and weak base for spaces, *Topology Appl.*, 査読有, 157(2010), 2383—2388.
DOI:10.1016/j.topol.2010.07.009

[学会発表] (計 9 件)

- ① 酒井政美, Remarks on some covering properties, 一般位相幾何及び幾何学的トポロジーの現状と諸問題, 2012年9月25日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 酒井政美, The weak Hurewicz property of Pixley-Roy hyperspaces, IV Workshop on Coverings, Selections and Games in Topology, 2012年6月27日, ナポリ第2大学, イタリア.
- ③ 酒井政美, The Frechet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces, 第47回位相空間論シンポジウム, 2012年6月3日, 愛媛大学.
- ④ 酒井政美, DCCC of Pixley-Roy hyperspaces, 46-th Spring Topology and Dynamics Conference, 2012年3月22日, Mexico City, メキシコ.
- ⑤ 酒井政美, Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces, General Topology Symposium, 2011年12月20日, 埼玉大学.
- ⑥ 酒井政美, Selective separability of Pixley-Roy hyperspaces, 11-th Prague Topological Symposium, 2011年8月9日, Prague Czech Republic, チェコ.
- ⑦ 酒井政美, Selective separability とその未解決問題, General Topology Symposium, 2010年12月20日, 筑波大学.
- ⑧ 酒井政美, Selective separability and its variations, Analysis, Topology and Applications 2010, 2010年6月22日, Vrnjacka Banja, セルビア.
- ⑨ 酒井政美, A characterization for βX to be scattered, 第45回位相空間論シンポジウム, 2010年6月4日, 大阪府立大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 政美 (SAKAI MASAMI)
神奈川大学・理学部・教授
研究者番号: 60215598

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3)連携研究者

矢島 幸信 (YAJIMA YUKINOBU)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：10142548

大田 春外 (OHTA HARUTO)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：40126769