様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　６日現在

機関番号：11101
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540166
研究課題名（和文）多重フーリエ級数の収束問題と解析的整数論における重み付き格子点問題の接点について
研究課題名（英文）On some contact points with the multiple Fourier series and lattice point problems with weights
研究代表者
倉坪　茂彦（KURATSUBO SHIGEHIKO）
弘前大学・大学院理工学研究科・客員研究員
研究者番号：50003512

研究成果の概要（和文）：ｄ次元ユークリッド空間上で定義された rarial 関数（原点からの距離にのみ依存する関数、放射状関数、と訳されることもある）に対する周期化関数の多重フーリエ級数の球形部分和の変動について研究した。我々は、これらの多重フーリエ級数について Pinsky 現象、Gibbs-Wilbraham 現象及び第３の現象（Kurastubo 現象）を研究した。第３の現象は、解析的整数論の古典的なテーマでもある格子点問題と密接な関係がある。また、フーリエ級数の収束問題はある意味で格子点問題と同値であることをしめした。

研究成果の概要（英文）： For the multiple Fourier series of periodization of radial functions on d-dimensional Euclidean space, we studied the behavior of the spherical partial sum. We showed the Gibbs-Wilbraham phenomenon, the Pinsky phenomenon and the third phenomenon for the multiple Fourier series. The third phenomenon is closely related to the lattice point problems, which is classical theme of analytic number theory. We also proved that the convergence problems on the Fourier series is equivalent to the lattice point problems in a sense.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：多重フーリエ級数、級数の点毎収束、重み付き格子点問題、Gibbs-Wilbraham 現象、Pinsky 現象、波動方程式の基本解、Mathematica（ソフト）

１．研究開始当初の背景

我々は、一貫して多重フーリエ級数の収束問題について研究を進めてきた。１変数のそれは、幾多の先人の研究の蓄積の上に最終的には 1966 年に Carleson-Hunt によって完全解決に至った。その前後より２次元以上の考察に

関心が移ってきた。中でも 1971 年に発表された Fefferman の 2 編の論文は衝撃的なものであった。フーリエ級数の部分和を矩形にとれば1変数と同様な結果が得られるが、球形にとった場合は、ノルム収束でさえも“p=2”以外には成り立たないというものであった。一般に点毎の収束問題はそれよりも難しいので、一般の関数について何か結果を出すのは至難の技といわざるを得ない。このような状況の中で突破口を開き、この分野の研究に大きな刺激を与えたのが、1993 年の Pinsky の論文であった。1 変数の考察からは予想もできない現象で、しかも証明は非常に初等的なものであった。後に Kahane はこの現象を Pinsky 現象と呼んだ。

(1) Pinsky 現象とは、対象関数が原点の近傍では滑らか（定数であってさえも）離れたところに存在する特異点（不連続点など）のために原点でそのフーリエ級数の球形部分和が発散する現象をいい、1990 年代の初めに M. Pinsky により発見された。彼はこの現象が３次元以上で発生する例として ball の特性関数があることを具体的に示した。1 次元の場合は、Riemann の局所性定理によりこのような現象は生じない。原点の近傍で滑らかならば、それに含まれる任意のコンパクト集合上で一様収束するからである。 2 次元以上ではこの局所性が成り立たないことがよく知られているが、この性質をもつ簡単な関数を示すことには成功していなかった。境界の特異性（不連続性）を強くすれば Taylor により計算ソフト Mathematica を用いたグラフによって 2 次元の波動方程式の基本解が求める条件を満たすことが示唆された。

(2) Gibbs-Wilbraham 現象とは、関数の不連続な点ではフーリエ級数の部分和の非一様収束性から生じる特異な変動をいう。フーリエ積分の逆変換の球形部分和については Brandlini, Colzani, Pinsky や Taylor などによってかなり一般に研究されていたが、多重フーリエ級数については手がつけられていなかった。

(3) 格子点問題とは、狭義には半径 r の球に含まれる整数解（各座標が整数）お個数を考察する問題で、この球の体積が第 1 近似となるが、この誤差を評価しようという解析的整数論の問題であるが、ここではある種の重みを付けた拡張された問題のことをいう。1920 年代より Hardy, Landau, Jarnik, Walfisz などのヨーロッパの数論の研究者により研究されてきた。1970 年代にはチェコスロバキアの Novak により精力的に研究されていた。

(4) 多重フーリエ級数のグラフは計算ソフト Mathematica などを使用することにより容易に視覚化できる。M. Taylor のリプリントではグラフから読み取れる現象について、部分和をとる次数の大きさに依存して Pinsky 現象よりは小さいが、Gibbs-Wilbraham 現象よりは大きな小刻みな変動の発生について指摘している。ときに激しく、ときに穏やかに変動“serendipity”を示すこの現象は数学的には証明されていなかった。

(5) 格子点問題の Hardy 予想（“重み付き”の場合に拡張して考える）と多重フーリエ級数の点毎収束問題の関係について論じた文献は皆無であった。その関係とは一方の結果を応用して他方の結果を導く、あるいはその逆、理想的には何らかの“同値性“を意識した考察をいう。

(6) 1 次元において有界変分関数のフーリエ級数は、不連続点の近傍でフーリエ級数が非一様収束することから生じる現象、つまり Gibbs-Wilbraham 現象を生じる。この Gibbs-Wilbraham 現象の発見は 19 世紀の中頃までさかのぼるが、この現象の起こるとき、フーリエ部分和の曲線の長さの大きさについて上からの order 評価が部分和の次数の対数であることが R. S. Strichartz （2000 年）により得られていた。

２．研究の目的

(1) 我々は、研究の対象とする関数を d 次元ユークリッド空間上で定義された radial（原点からの距離のみに依存する、放射状とも訳す）関数から周期化関数として生成される周期関数にしぼった。この周期化関数のフーリエ係数は、もとの関数のフーリエ積分から計算される利点がある。

３．研究の方法

(1) G. H. Hardy の等式（歴史的には Voronoi-Hardy-Landau の等式と呼ぶべきかもしれない）を原点以外にも成立するように拡張する。この等式と Poisson の和公式を用いることでフーリエ級数の部分和とフーリエ積分の逆変換の部分和との関係を導く。新しい研究の視点として 計算ソフト Mathematica を使って視覚化することにより論理の道筋を説明する。

(2) フーリエ級数をフーリエ積分の逆変換の部分和で近似してその誤差を格子点問題

（重み付き格子点問題）の評価に帰着させる。この部分では Noak の 1970 年代の研究成果が生きてくることになった。

(3) 格子点問題の拡張された Hardy 予想と我々の研究対象の関数のフーリエ級数の球形部分和との関係を追及する。

(4) １次元の有界変動関数について Strichartz の計算を精密に計算することで 不等式を等式で置き換え Strichartz の結果を精密にする。

４．研究成果

(1) 球面上に特異点を持つある radal 関数から生成された周期化関数（Pinsky の ball の特性関数、Taylor の波動方程式の基本解を含む）に対して、多重フーリエ級数の球形部分和は、フーリエ積分の逆変換の球形部分和（第１項）、格子点問題の評価式とフーリエ積分の積の有限和（第２項）及び error term（第３項）の３つの部分の和で表すことができた（以後、分解定理と呼ぶ)。これは論文②、④で発表された。

(2) 我々の 1996 年の論文で、ball の特性関数の多重フーリエ球形部分和は、原点と不連続点をなす球面を除き各点で収束することが証明されたが、5 次元以上のときは、有理数点（各座標が有理数）での下からの評価が不完全であった。我々は論文④でこの問題を完全に解決した。とくに 5 次元については、有理点（各座標が有理数）では発散するが、然らざる場合は収束する、という結果になる。格子点問題の平均に関する Novak の評価式を使って部分和の次数についてある性質をもった数列を選ぶことができることを使って証明に成功した。

(3) フーリエ部分和を 3 つの部分に分解できる（分解定理）ことを証明した（投稿準備中）。第 1 項は Bessel 関数のからむ積分で評価され、第 2 項は格子点問題の評価式と関数のフーリエ積分に関わる部分、惰 3 項は一様評価をもつ誤差項である。

(4) 分解定理により、考察対象の関数族に対しては、原点における Pinsky 現象の発生メカニズムを解明した（投稿準備中）。第 1 項が惰 2 項より相対的に大きいため、惰 1 項の性質がその現象の存否を決定することを明らかにした。

(5) 分解定理により、境界における Gibbs-Wilbraham 現象の発生メカニズムは、4 次元以下のとき、第 1 項が第 2 項より相対的にも大きい状況のとき発生することを証明した（投稿準備中)。なお 5 次元以上のときは、第 2 項が大きくなってその現象を掻き消してしまうメカニズムが明らかとなった。

(6) 2 次元と 3 次元のときには、研究対象の関数族のフーリエ級数の収束性と Hardy 予想が同値であることが証明できた（投稿準備中)。

(7) 1 次元における Gibbs-Wilbraham 現象の生ずる状態（有界変分で不連続な）でこの部分和の曲線の長さは、漸近的に（関数の全変分）と（部分和の次数の対数）の積になることが証明できた（①)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

①Kazuki Dempo･Shigehiko Kuratsubo, Journal of Fourier Analysis and Applications,査読有 17(2011),656-661.

②倉坪茂彦,「 数学」、日本数学会誌,査読有, 63(2011), 103-118.

③ Shigehiko Kuratsubo, Eiich Nakai and Kazuya Ootsubo, Journal of Functional. Analysis. 査読有 259(2010),315-342.

④ Shigehiko Kuratsubo, Journal of Fourier Analysis and .Applications. 査読有,16(2010), 52-59.

〔学会発表〕（計 8 件）

①倉坪茂彦、奈良女子大学解析セミナー, 3.19,2013

②Shigehiko Kuratsubo,2012 年度アメリカ数学会年会、1.4-7,2012.(Boston)

③ Shigehiko Kuratsubo 、 Harmonic Analysis and its Applications at Nara （奈良国際セミナーハウス）2011, 11. 11-13, 2011.

④Shigehiko Kuratsubo, 「ハーデイー空間などに関する最近の研究について」(東京大学）, 9.10,2011.

⑤倉坪茂彦､東北大学　解析セミナー､7.25、2011.

⑥倉坪茂彦、2011 年度日本数学会年会、3.20-23、2011. （震災のため中止されたが講演成立）

⑦倉坪茂彦、調和解析セミナー（日本大学経済学部)、12.25-27, 2010.

⑧倉坪茂彦、日本数学会年会 (名古屋大学)、9.22-25, 2010.

６．研究組織

(1)研究代表者　倉坪茂彦
(KURATUBO　SHIGEHIKO)
弘前大学・大学院理工学研究科・客員研究員

研究者番号：50003512

(2)研究分担者　中井英一
(　NAKAI　EIICHI　)
茨城大学理学部数学・情報数理領域・教授
研究者番号：60259900